DEPARTAMENTO CIENCIAS BASICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

IIISEM-V

III SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

Memorias

“NUEVOS PARADIGMAS EN LA POST-PANDEMIA en EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

Tomo I
Conferencias

MAYO’2022

Memorias del III SEM-V
Tomo I
Mayo'2022

Editor Científico: Jorge E. SAGULA
Compilador: Jorge E. SAGULA
Editor Gráfico: Diego O. AGUDO

III SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual
III SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual : Nuevos paradigmas en la post-pandemia en Educación Matemática : tomo I : conferencias. - 1a ed - Luján : EdUnLu, 2023.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-3941-86-3

1. Matemática.
CDD 510.711

Prólogo

A los 12 días del mes de mayo del año 2022, y en su mes histórico, y durante Dos (2) días, se desarrolla la 3ª edición del SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual), migración del histórico SEM (Simposio de Educación Matemática) que nació a fines del siglo pasado, en el mes de mayo del año 1999, en el Centro Regional Chivilcoy de la Universidad Nacional de Luján.

La idea original, concebida en 1998 y testeada en distintos escenarios de la Educación Superior no sólo en ámbitos académicos de Argentina sino en distintos países del Continente Americano y en Europa, y como consecuencia de mis participaciones en diferentes espacios de Educación Matemática fuera de Argentina, permitió sembrar semillas cognitivas y regarlas con diferentes enfoques y modalidades para potenciar a la Matemática en un país tenedor de Tres (3) Premios Nobel en Ciencias, y cuyo derrotero en Matemática, en general, tuvo momentos de alto reconocimiento y posicionamiento en varios países de América y Europa.

Los tiempos de pandemia, la disruptora pandemia CoViD-19 permitió este nuevo aporte a la Educación Matemática, en aras de propender a la mejora continua sin singularidades de la Educación en general, potenciando a través de la Modernidad Líquida, la utilización de los mismos Tres (3) sentidos que se utilizan, en general, en un proceso de construcción del conocimiento en forma convencional, presencial. Así, el encuentro de profesores-investigadores, en distintas líneas y desde distintos puntos, ha permitido tener encendida "la llama del aprendizaje" en el campo de la Educación Matemática.

Por tal razón, y respondiendo a las autoridades de la Universidad Nacional de Luján, acercamos a la Comunidad de la Educación Matemática esta nueva edición, el III SEM-V para seguir su derrotero, y este año, su leitmotiv es: "NUEVOS PARADIGMAS EN LA POST-PANDEMIA en EDUCACIÓN MATEMÁTICA", que no tienen que quedar sólo en el seno del Simposio sino trascender y volcarse a las aulas en todos los niveles.

Jorge E. SAGULA
Chivilcoy, 25 de abril de 2022.

Índice Modalidad

CA: Contexto Abierto

GTD: Grupo de Trabajo-Discusión

- **GTD-1-DM:** Didáctica Matemática
- **GTD-2-MM:** Modelización Matemática
- **GTD-3-RP:** Resolución de Problemas
- **GTD-4-EE:** Educación Estocástica

Índice de Conferencias

III SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

IIISEM-V

Índice de Conferencias

Índice de Conferencias

Índice de Conferencias

PANEL DE APERTURA

"CONSECUENCIAS DE LA PANDEMIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

Moderador

Jorge E. SAGULA
Departamento Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Luján, Argentina

Disertaciones

Bruno D'AMORE
NRD-Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Los Desafíos más urgentes en Didáctica de la Matemática

Salvador LLINARES
Universidad de Alicante, España

CoViD y Educación Matemática: lecciones a ser aprendidas en la Formación de Profesores de Matemáticas

La pandemia de los últimos dos años ha tensionado a los sistemas educativos, y en particular a los programas de formación de profesores de Matemáticas, produciendo necesidades de creación de nuevos recursos y espacios de comunicación, Las decisiones y adaptaciones generadas por los formadores, aunque respondían a necesidades coyunturales en ese momento, en algunos casos nos dan elementos para pensar en lecciones que debemos aprender. Identificar algunas de estas lecciones considerando los nuevos recursos y las características de los espacios de interacción puede ser relevante para realizar cambios que mejoren las aproximaciones de los educadores matemáticos con el objetivo de potenciar el desarrollo de competencias docentes en los estudiantes para ser profesores de matemáticas.

Fredy E. GONZÁLEZ
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

COVID-19: Tsunami Emocional en la Educación Matemática

El surgimiento en los inicios de 2020, de un nuevo coronavirus tipo 2, causante del síndrome respiratorio agudo severo (SARS-CoV-2, por sus siglas en inglés: *Severe Acute Respiratory Syndrome*) y bautizada, el 11 de febrero de 2020, por la Organización Mundial de la Salud, como COVID-19, un acrónimo de CoronaVirus Disease 2019, generó una hecatombe a escala planetaria que ha ocasionado millones de contagios y otro tanto de fallecimientos en todos los estratos sociales. En esta intervención se examinará el impacto de esta situación sobre la Dimensión Afectiva, particularmente en el ámbito emocional, de los profesores que enseñan Matemática y de quienes la estudian.

Carina S. GONZÁLEZ GONZÁLEZ
Universidad de La Laguna, Tenerife, Islas Canarias, España

Hacia una Educación Matemática Inclusiva mediada por la Tecnología

La educación inclusiva es un paradigma que intenta brindar a todas las personas una educación de calidad independientemente de sus diferentes capacidades, a las cuales debe poder adaptarse.
La respuesta educativa de calidad a las necesidades del alumnado, y en concreto a los más vulnerables, constituye uno de los retos del milenio, y las situaciones de vulnerabilidad se han acentuado por la pandemia.
La digitalización de la educación debe, por tanto, contemplar los principios del modelo inclusivo, tales como universalización, equidad, derechos humanos, enfoque transversal o personalización, además de garantizar el acceso a esta educación, incluyendo la accesibilidad a las plataformas y contenidos. Por ello, aquí abordaré el análisis sobre cómo pueden aplicarse estos principios de educación inclusiva en entornos digitales de enseñanza y aprendizaje, y, además, plasmar dos casos concretos de educación inclusiva con personas con síndrome de Down y en personas en situación de enfermedad.

PANEL DE CLAUSURA

“ENFOQUES INTERDISCIPLINARES EN PROCURA DE MEJORAR EL APRENDIZAJE EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

Moderadora
Emma L. FERRERO
Directora Decana del Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina

Disertaciones

Rafael LORENZO MARTÍN
Universidad de Holguín, Cuba

Optimización Multivariable de la Formación Matemática en Nivel Secundario: Factores asociados a la dirección “Mirada Pos-Pandémica”

Reconocer manifestaciones inéditas en el marco de la Educación Matemática devenidas en el año 2020 como consecuencia de discontinuidades de la zona de confort, desde la aparición de la enfermedad COVID-19, y que irrumpió en un escenario alarmante a nivel tanto global, local y sectorial; implica un redimensionamiento de la formación matemática. Al respecto es bueno distinguir que en el 2020 se ha roto la –aparente aceptación de la- normalidad del planeta desde cambios radicales en todos los órdenes donde lo social ha sido reestructurado en su proyección y significado, coherente con el nuevo contexto que se avizora. Lo anterior fue un catalizador –de aspectos ya acumulados- para revelar diferentes niveles de entropías y efectos no deseados que se venían gestando hace tiempo. Emerge en estas circunstancias un escenario que impone nuevas estructuras, componentes, dinámicas, funciones y relaciones en las sociedades posteriores al año 2020, lo que demanda miradas analíticas y críticas, desde una proyección transdisciplinaria dialéctica. En esta urgencia, se impone la capacidad de revisar los fenómenos de forma multifactorial, desde múltiples niveles y fronteras disciplinarias que ofrece una situación contextual con un conocimiento más holístico. En efecto emerge redimensionar y/o concebir conceptos, transgredir zonas del saber, reflexiones y metodologías capaces de hacer frente a las exigencias de una época cuyos desafíos van más allá de los límites disciplinarios y comprometen todas las dimensiones de lo social, lo espiritual y lo material, subjetivando la objetividad. Arraigado a lo anterior se deriva una forma de gestión con mayor sensibilidad en el ser humano y sus inseparables relaciones como ser social. En esta perspectiva la gestión -de manera general- se debe enfocar hacia el cambio y desde enfoques sociales. El cambio -pensado como desarrollo humano- no es algo nuevo y ha estado presente en toda la historia de la humanidad desde su naturaleza histórico lógica. En especial, las entropías educativas que irrumpen estudios con enfoques alternativos revelados por la emergencia sanitaria producida por la COVID-19 generando actitudes y manifestaciones de resiliencia social y mutaciones inéditas. Esta gestión del cambio tiene como ingrediente especial a una nueva conmoción del conocimiento en todas las áreas que se manifiesta en una versatilidad ilimitada de propuestas y socializaciones, que invitan a una mejor convergencia. Al respecto, en ocasiones se propicia un estudio del cambio esquemático inoperante para una realidad polisémica y cada vez más dinámica, multifactorial y mutante, por lo que anula una gestión acertada. En el sector educativo de forma general, se percibían ciertas problemáticas referentes al uso de la tecnología educativa, entre otras razones por *la desactualización de los planes de estudios, la baja conexión entre empleadores y profesores universitarios, por desmotivaciones inherentes a situaciones sociales propias de alumnos,* *por prejuicios de diferentes índoles y por sobre todas las cosas, por déficit en las capacidades didácticas para asumir una era tecnológica y de gestión del conocimiento de los docentes encargados de conducir el proceso de formación. Los cambios disruptivos de los escenarios naturales a los pandémicos demostraron que ni las dinámicas educativas estaban preparadas del todo para una reinserción.* En consecuencia, se sintetiza lo anterior desde la pregunta generadora: ¿Qué experiencias desarrolladoras desde enfoques convergentes contemplar en los escenarios emergentes de formación matemática impactados en la etapa pandémica del año 2020? En este sentido se propone un estudio de las variables asociadas a la dirección escolar que impactan en la didáctica de la Educación Matemática.

Marcel D. POCHULU
Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Villa María

Enfoques Interdisciplinares para la clase de Matemática en Ingeniería

Los retos actuales presentados por las diversas ciencias o disciplinas llegan a la clase de Matemática de ingeniería convertidos en problemas que plantean la necesidad de un abordaje interdisciplinario y contextualizado. En esta línea, se presentan algunos resultados de investigaciones, los cuales podrían servir de punto de partida para pensar en un enfoque diferente, donde se trabajen problemas reales del campo profesional de la ingeniería en el que se inserta la Matemática. Esto implica que iniciemos un proceso de cuestionamiento sobre el saber matemático y el saber matemático escolar, que se sintetiza al preguntarnos, ¿por qué debería enseñar este contenido?, ¿existen otras maneras de enseñarlo en este contexto y para esta carrera de ingeniería? ¿qué problemas son más apropiados? y evitar la reproducción de modelos que seguramente estuvieron presentes en nuestra formación previa. La búsqueda de respuestas a estas preguntas nos llevará a descubrir vínculos que unen los fenómenos aparentemente inconexos entre distintas ciencias o disciplinas.

Juan E. NÁPOLES VALDES
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina

Las Derivadas Fraccionarias: Más allá de lo Local, Memoria Global

Una de las nociones básicas en cualquier curso de Cálculo, es la de Derivada y su definición, en términos de un cierto cociente incremental, es una de las herramientas más poderosas en las aplicaciones. Sin esta noción, el estudio de multitud de aplicaciones, sería poco menos que imposible. Desde el 30 de septiembre de 1695, al preguntarle L'Hopital a Leibniz el significado de la derivada de orden ½, hemos avanzado en una noción de Derivada que, en realidad, no es una derivada, sino una ¡Integral! Dicho esto, el carácter Local de la derivada se pierde, pero se gana un aspecto totalmente nuevo, la "Memoria Global".

Marcelo F. MILRAD
Linnaeus University, Suecia

La Analítica de Aprendizaje como herramienta de soporte en la Educación Matemática: ¿Una Nueva Caja de Pandora?

Las tecnologías digitales y en particular, el uso de analíticas de datos está cambiando la forma de "cómo" realizamos muchas tareas cotidianas: compras on-line, clases virtuales, consultas electrónicas en el área de salud, etc. En gran parte de estas áreas, la Inteligencia Artificial (IA) surge ofreciendo diferentes productos y servicios digitales. Un área emergente de la aplicación de la IA en Educación,

Analítica de Aprendizaje, corresponde a medición, recopilación, análisis, visualización e informe de datos sobre los alumnos y sus contextos educativos, con el propósito de comprender y optimizar el aprendizaje y los entornos donde ocurre. Un campo estrechamente relacionado es la Minería de Datos Educativa.
La situación actual del mundo, caracterizada por un alto nivel de incertidumbre, nos hace repensar nuevas formas y modelos sobre la potencialidad del aprendizaje digital en diferentes contextos educativos y el uso de la IA y AA. Aquí, expondré algunas de estas oportunidades y sus consecuentes desafíos asociados al contexto educativo y el uso de la IA y la AA, enfatizando en la importancia del pensamiento matemático y crítico y herramientas fundamentales para poder enfrentar tales desafíos, y los desafíos éticos y morales asociados con estos enfoques.

Jorge E. SAGULA
Departamento Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Luján, Argentina

Una Visión Transdisciplinar de la Educación Matemática: la Gastronomía Gourmet

Alguien puede preguntarse por qué en un Simposio de Educación Matemática es posible una conferencia de esta temática, y a priori, descontextualizada; sin embargo, si bien es algo muy poco habitual, es relevante advertir cómo la Gastronomía Gourmet (o la Alta Cocina) se traduce en un claro ejemplo de Convergencia de distintos aspectos de la Matemática en su más amplia expresión, y consecuentemente, es posible presentar ideas tendientes a contribuir en la mejora del aprendizaje en Educación Matemática a través de un sólido puente con la Gastronomía Gourmet.
¿Por qué esto es posible? Porque en la Gastronomía Gourmet se aplican directa e indirectamente conceptos tales como: formas, proporciones, distribución de colores, expresiones armónicas, requerimientos y restricciones, combinaciones, secuencias, recursos, asignación de recursos, pertenencia difusa, teoría de juegos, balances, puntos de equilibrio, entre otros conceptos.
En esta instancia, podemos postular que la Gastronomía Gourmet puede verse en el contexto de la Etno-Matemática, pero puede concluirse el surgimiento de la Gastronomía Matemática y desde allí, colaborar en la mejora continua, en un ida y vuelta, de ambas disciplinas.
Cuando asocio mis dos hemisferios cerebrales, y pienso en un nuevo plato, desde mi cerebro de matemático, plasmo la idea, entonces defino *mi hipótesis*, pero visualizo el plato en su versión final, entonces conceptualizo *mi tesis*, y procedo a realizar la preparación, empleando las estrategias más adecuadas para ese momento, estoy realizando *la demostración*. Todos mis menús constituyen *Mis Teoremas*, en general trabajo sobre la Resolución de Problemas, en búsqueda de lo creativo y lúdico, en búsqueda de un Juego.

REFLEXIONES BÁSICAS SOBRE EL TEMA DE LAS RELACIONES ENTRE ÉTICA Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Bruno D'AMORE
NRD-Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia
bruno.damore@unibo.it

Resumen

En este texto se examinan las relaciones básicas entre la ética y la educación matemática. También se discute la relación entre ética y moral.

Este texto es una ampliación de: D'Amore, B. (2021). Prologo. En: L. Radford & M. S. Acuña (Eds.), *Ética: entre educación y filosofía*. Pp. IX-XVII. Bogotá: Universidad de los Andes, Centro de Ética Aplicada.

Ética

El término “ética” puede ser interpretado como el conjunto de normas y de valores sobre los cuales se fundamentan las reglas del comportamiento humano en la sociedad de la cual se es parte. Pero, puede también ser considerado como un criterio de juicio relativo a los comportamientos tanto propios como de los otros.
Dado que la descripción precedente está sujeta a interpretaciones personales, son muchos quienes confunden la ética con la moral.
En mi opinión, sin embargo, la ética comprende una reflexión lógica y racional sobre los eventos sociales, que en la moral no se requieren.
Si se razona así, se comienza a intuir el por qué tiene sentido hablar de ética en un tema como la didáctica.

Moral y Ética

Ambas están relacionadas con el carácter de los hábitos de un grupo.
En varios contextos se utiliza el término ética para referirse a la filosofía moral, mientras que moral se refiere a los diferentes códigos de comportamiento concretos.
Algunos autores conciben la ética como el conjunto de normas sugeridas por ideas o creencias, la moral como el conjunto de las normas imperantes en un determinado grupo social.
No todos están de acuerdo con dicha distinción, y es por esto que en ocasiones no se hace distinción entre los dos conceptos, considerándolos equivalentes.
El matiz que los delimita está en la observancia o aplicación práctica de la norma que entraña el mandato ético. Por ello, la norma ética siempre es teórica, en tanto que la moral sería su aplicación práctica.
Según este punto de vista, la moral se basa en los valores que dicta la conciencia; valores que, a su vez, están basados en costumbres compartidas en una comunidad. Dicho punto de vista dice que la moral no es absoluta ni universal, ya que su vigencia depende de los hábitos de una región o de una comunidad: se habla por lo tanto de una forma de *relativismo cultural*.
El núcleo de la moral se establece alguna vez con el concepto de “valor”. Cada persona tiene unos valores determinados, igualmente como los tiene la cultura que identifican estos valores.
Por otra parte, la universalidad de algún sistema moral es uno de los objetivos de la ética, un objetivo cuyo contenido o efecto no se considera relativo ni subjetivo, sino efectivo y aplicable para todo hombre racional bajo un contexto determinado. Para afirmar esto, hay que suponer que este hombre pueda actuar de manera racional y según un comportamiento moral específico compartido, comportamiento que la sociedad juzga “correcto”.

Muchos autores proponen que la moral es un producto de la selección natural, en cuanto esta conserva comportamientos sociales favorables al éxito evolutivo de los grupos.
Las sociedades animales muestran muchos ejemplos de cohesión basada en la sumisión instintiva a las que parecen ser leyes no escritas. Los grupos primitivos antepasados de la especie humana tenían sin duda una organización de este tipo que, con el desarrollo de las facultades cerebrales, se transformó progresivamente en la institución de legislaciones explícitas, y en el consecuente respeto de ellas.
Las sociedades que se otorgaron leyes y las aplicaron resultaron ser más capaces de sobrevivir y proliferar que las sociedades libradas a la anarquía y a la competencia salvaje entre sus miembros.

¿Cuál es entonces el origen de nuestro comportamiento ético? Existen buenas razones para creer que, por evolución biológica y por desarrollo cultural, la ética ha evolucionado de forma progresiva, desde una forma puramente pragmática y utilitaria, hasta una concepción más abstracta del bien y del mal. La mayoría de las civilizaciones distinguen entre las legislaciones, dictadas por consideraciones de convivencia, y las normas éticas, basadas en valores absolutos.
También son obvios los aspectos institucionales, normativos y sociales: el ser humano es parte de la institución (por ejemplo: la clase, la escuela) y la ética no tiene que ver con un determinado individuo en sí, sino que tiene que ver con la *relación* de éste con los otros individuos *dentro de la institución misma*.
Se trata entonces de un tema relacional y social.
Al interno de la institución, la ética guía la acción del individuo en relación con los demás y condiciona los sentimientos; y tiene profundos aspectos sociales porque lleva a evitar el deseo de satisfacer sólo los intereses personales en favor de objetivos más amplios, los objetivos sociales, precisamente.
Hasta hacer del *ser individual* un *individuo social*: un juego de palabras iluminante.

Regresamos a nuestro tema fundamental: la Didáctica de la Matemática

Ahora bien, pensemos en todos los factores emocionales, sociales, interpersonales que encontramos en el trabajo didáctico.
Los conceptos de labor conjunta, de subjetivación, de objetivación, inducen a pensar que, más allá de lo que emerge en la labor común en aula entre docente y alumno, entre alumno y compañeros, en la sociedad concreta y no sólo en la sociedad ideal "clase", los principios éticos, relacionados con los sentimientos personales implicados en los procesos de objetivación son relevantes, complejos y, al mismo tiempo, espontáneos, y forman parte de aquello que a veces, ingenuamente, se llama *aprendizaje*.
Es así como adquiere sentido completo la idea que algunos estudiosos de didáctica de la matemática centren sus análisis en el tema de la ética, en particular para quienes se inspiran en aquellas teorías de la didáctica de la matemática que se aglutinan bajo el nombre de *teoría de la objetivación*, en la cual se promulgan ideas que no encuentran espacio en teorías precedentes relacionadas con las interacciones sociales que se desarrollan en aula y a la idea que aprender (la matemática) significa formar parte de una sociedad, desarrollar un conocimiento y una consciencia histórica de pertenencia.
Quiero aquí recordar que la teoría de la objetivación está ubicada entre las teorías llamadas *socioculturales*. En dichas teorías se supone que el saber es generado por los individuos en el curso de prácticas sociales construidas histórica y culturalmente.
La producción del saber no depende por tanto de exigencias de adaptación, sino que está incorporada en formas culturales de pensamiento, relacionadas con una realidad simbólica, política, económica y material que ofrece las bases para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos, los conceptos y las ideas que ellos se forman a propósito de dicha realidad.
El aprendizaje es la realización de un saber culturalmente objetivo que los estudiantes obtienen a través de un proceso social de objetivación mediado por signos, lenguajes, artefactos e interacciones sociales, cuando los estudiantes se empeñan en formas culturales de reflexiones y de acción (D'Amore, 2015, 2018).
Respecto a los paradigmas precedentes, las bases de las teorías sociales culturales se presentan como una ruptura en el verdadero sentido del significado; se trata, de hecho, de interpretar en forma decididamente nueva las ideas de conocimiento y saber.
Según las teorías socioculturales, el concepto de adaptación como forma de aprendizaje no es suficiente para entender en toda su profundidad la idea de producción de saberes, de su manifestación concreta en las prácticas sociales o de su apropiación como conocimiento (el aprendizaje).
Según estas teorías el saber y el conocimiento no son el resultado de estructuras de carácter epistémico que transcienden la cultura, sino que esas mismas estructuras son los resultados de una forma cultural, constituida de reflexiones y de acciones incorporadas en las mismas prácticas sociales, con la mediación del lenguaje, debidas a la interacción social, gracias al uso de signos y a la creación de artefactos oportunos (Radford, 2006, 2011; D'Amore & Radford, 2017).
La teoría de la objetivación, en particular, se basa en la idea considerada fundamental que *el aprendizaje es, al mismo tiempo, conocer y devenir*, es decir, no puede ser circunscrito únicamente al ámbito del conocimiento, sino que debe afrontar el ámbito del ser y aquello específico de los sujetos.
El objetivo de la educación matemática es un esfuerzo dinámico, político, social, histórico que lleva a sujetos reflexivos y éticos, hacia la creación dialéctica relativa a discursos temáticos y hacia prácticas de carácter matemático que se constituyen histórica y culturalmente, discursos y prácticas que están en evolución continua.
A fortalecer estas reflexiones me ha llevado la lectura atenta y crítica de un libro reciente:
Luis Radford y Maritza Silva Acuña (Compiladores) (2021), *Ética: entre educación y filosofía*. Bogotá: Universidad de los Andes. (Radford &Acuña, Eds., 2021).
Este libro es el resultado de un diálogo entre educadores de la matemática y filósofos; trata del problema de la ética, considerándola como disciplina que se investiga a la luz de dos direcciones de interés general: la educación y la filosofía. Aunque la ética sigue relativamente eludiendo la atención de la investigación en la educación matemática, un examen de la literatura permite descubrir una serie de estudios, que incluyen trabajos de Paul Ernest y Luis Radford. Entre aquellos que más me han impresionado cabe mencionar algunos de Ernest (1988, 1991, 1994, 1998, 2011, 2018; 2019) y otros de Radford (2011, 2012, 2014, 2016a, b, c, d, 2017a, b).
Este libro adquiere así un interés especial, iniciando con el título, ya insinuado en mis notas precedentes: propone una ética vista como punto de pasaje entre educación y filosofía.
Cada una de las tres partes de las cuales se compone el libro plantea una problemática específica y no sólo culturalmente atractiva.
En la Parte 1, la ética se presenta como puente de conjunción y de debate entre la filosofía y la educación, con análisis muy precisos y significativos, incluso concretos, acerca del papel del docente, incluyendo

Este texto es una ampliación de: D'Amore, B. (2021). Prologo. En: L. Radford & M. S. Acuña (Eds.), *Ética: entre educación y filosofía*. Pp. IX-XVII. Bogotá: Universidad de los Andes, Centro de Ética Aplicada.

discusiones sobre la sensibilidad, el espacio ético del cuerpo y las funciones estéticas interpretadas como elementos descriptivos de una ética pedagógica.
En la Parte2, la relación se invierte, y el debate se sitúa entre educación y filosofía. No son situaciones idénticas, sino simétricas; algunas incluso pueden ser concretas, como la presencia de la problemática de la ética en la matemática y en su enseñanza.
Como afirmaba líneas arriba, el encuentro con el otro determina la dimensión ética pero siempre de forma específica y significativa en la educación matemática. Es esta especificidad, esta forma de ver e interpretar, esta forma de situarse lo que define y describe la relación específica de esta segunda parte del libro.
Desde este ángulo teórico, tan específico y significativo, como esperábamos y como lo anuncié en el caso específico de la teoría de la objetivación, se determina con precisión aquello qué se entiende en esta teoría como ética.
Un ejemplo significativo y específico se tiene en la teoría de la objetivación en la cual la educación matemática, como mencioné anteriormente, es vista como esfuerzo social volcado a la creación de sujetos que vienen a idear, imaginar y compartir formas de vida colectiva, como resultado del impulso que han recibido hacía formas potenciales de acción y de pensamiento.
Es evidente como el contenido matemático de las acciones que se cumplen en didáctica de la matemática no es nada más que *una* componente, no estamos hablando de *la* componente.
Acción no sólo sobre el *saber*, sino sobre el *ser*, tanto de llegar a concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje como una dimensión que involucra estos dos aspectos fundamentales del individuo: saber y ser.
Dado que aquel sobre el cual este proceso de aprendizaje está construido/hipotetizado/realizado es un ser humano, los aspectos culturales deben formar parte de este proceso; pero también deben serlo los aspectos relacionales, colectivos y sociales, éticos precisamente; y siendo este fenómeno tan absorbente en el plano humano, ninguno de los aspectos emocionales puede ser minimizado: aprendiendo, el individuo se transforma porque entra en contacto con hechos históricos culturales e históricamente situados en la sociedad.
Es por esto que se habla siempre, a este propósito, de “encuentro”, dado que se ponen en contacto sistemas de pensamiento, de evoluciones vitales, de acciones que determinan la sociedad con la cual el estudiante se relaciona. Este encuentro no es sólo heterólogo, sino que también es personal. Gracias a este proceso, quien aprende entra en contacto con sí mismo, en su singularidad y en su pertenencia a una sociedad que está, ética e históricamente, descubriendo y al mismo tiempo construyendo.
En otras ocasiones he analizado en profundidad estos aspectos, por ejemplo, estudiando el concepto de *labor* y el de relaciones entre la subjetivación y la objetivación; por tanto, no voy a profundizar y me limito a un par de citaciones de textos en español (D’Amore, 2015, 2018).
Es decisivo entender cómo individuo y cultura son entidades no sólo puestas en mutua relación sino coexistentes, nunca inmóviles; son entidades sometidas a cambios continuos, con influencias que determinan sus relaciones y que conllevan continuos cambios.
Alumnos y docentes están, por tanto, también ellos en continuo cambio relativo, activos en la transformación de sí mismos y relaciones reciprocas, representando proyectos de vida nunca firmemente determinados sino en continua evolución, con cambios de sensaciones y de experiencias recíprocas; por lo tanto, en otras palabras, sujetos éticos con influencias recíprocas.
En la Parte 3 se abre un esperado camino significativo, en un cierto sentido determinante: se aborda la cuestión de cómo la ética se revela y se especifica en la educación. Se llega a argüir que la acción del docente de matemática se sitúa entre ética y estética. Se propone que la inclusión, en las clases de matemática, debe ser considerada un imperativo ético.
Este tema ha sido debatido en todo el mundo desde hace años sin llegar a ser resuelto; en ocasiones es interpretado de manera opuesta de lo que la ética sugiere, es más, de lo que la ética impone.
Así como la reflexión y la postura ética forman parte esencial de la formación docente, tal y como se ve en los profesionales de la salud, de los periodistas o de quienes crean fuentes o canales de información, resulta igualmente de gran importancia la reflexión específica de los aspectos éticos presentes en la actividad matemática.
Este libro regala al lector, al docente de matemática, al investigador en didáctica de la matemática reflexiones e indicaciones muchas veces omitidas, olvidadas o dadas por descontadas; estas reflexiones no son secundarias a aquellas que ocupan un mayor debate en el campo de análisis de investigación, sino que, por el contrario, de alguna manera los determinan.
Es por esto que saludo con entusiasmo y con favor este libro, texto que presenta ámbitos de estudio muchas veces marginalizados, presentándolos con un gran número de detalles, incluso concretos, con reflexiones profundas, densas y significativas que sorprenderán, lo sé, lo imagino, a los lectores.

Referencias Bibliográficas

D’Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. En L. Branchetti (Ed.). *Teaching and Learning Mathematics.Some Past and Current Approaches to Mathematics Education*. Pp. 151-171. Isonomia, On-line Journal of Philosophy — Epistemologic. University of Urbino Carlo Bo. ISSN 2037-4348.http://isonomia.uniurb.it/epistemologica /http://isonomia.uniurb.it/node/30

D’Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA, 12*(2), 97-127.

D’Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ernest, P. (1988). The Attitudes and Practices of Student Teachers of Primary School Mathematics, *Proceedings of 12th International Psychology of Mathematics Education Conference, Veszprem, Hungary: OOK.* Vol. 1. Pp. 288-295.

Ernest, P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education. London: Routledge.

Ernest, P. (Ed.) (1994). *Mathematics Education and Philosophy: An International Perspective*. Washington DC: Falmer.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivismas a Philosophy of Mathematics*. Albany, New York: State University of New York Press.

Ernest, P. (2011). Mathematics and Special Educational Needs. Saarbrucken, Germany: Lambert Academic Publishing.

Ernest, P. (Ed.) (2018). *The Philosophy of Mathematics Education Today*. Switzerland: Springer.

Ernest, P. (2019). The ethical obligations of the mathematics teacher. *Journal of Pedagogical Research*, *3* (1), 80-91.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En L. Radford & B. D’Amore (Eds.) (2006), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. *Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Special Number. Pp. 103-129. Cinvestav, México DF., México. http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf (available at: http://luisradford.ca).

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez & R. Rickenmann (Eds.), *L’activitat docente: intervenció, innovació, investigación*. Pp. 33-49. Girona (Spain): Documenta Universitaria.

Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1), 101-118.

Radford L. (2013). *De la teoría de la objetivación*. Conferencia inaugural del XIV Congreso Colombiano de Matemática Educativa, Barranquilla, Colombia, octubre 9-11, 2013.

Radford, L. (2014). On teachers *and* students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36.* Vol. 1, pp. 1-20. Vancouver: PME.

Radford, L. (2016a). The ethic of semiosis and the classroom constitution of mathematical subjects. *13th. International Congress on Mathematical Education.*

Topic Study Group 54: Semiotics in Mathematics Education. Hamburg, Germany, 24-31 July 2016

Radford, L. (2016b). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 925-933.

Radford, L. (2016c). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258-266.

Radford, L. (2016d). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. *International Journal for Research in Mathematics Education* - RIPEM, 2, 187-206.

Radford, L. (2017a). La consapevolezza dell'importanza del contesto sociale, culturale e politico del pensiero, dell'insegnamento e dell'apprendimento: alcuni elementi del mio percorso. *La matematica e la sua didattica*, *25*(1), 65-74.

Radford, L. (2017b). Ser, subjetividad y alienación. En D'Amore, B., & Radford, L. (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Pp. 137-166. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. & Acuña, M. S. (Eds.) (2021), *Ética: entre educación y filosofía*. Bogotá: Universidad de los Andes.

ALGUNOS EJEMPLOS DEL FENÓMENO DEL *DESLIZAMIENTO METADIDÁCTICO* EN LA PRÁCTICA ESCOLAR

Martha Isabel FANDIÑO PINILLA
NRD-Núcleo de investigación en Didáctica de la Matemática,
Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia

Resumen

En didáctica de la Matemática se ha evidenciado durante décadas el problema del deslizamiento metadidáctico (glissement metadidactique) evidenciado por Guy Brousseau. Pero la práctica didáctica escolar propone modelos de comportamiento (enseñanza – aprendizaje de la Matemática) desde los cuales se evidencia que el tema es del todo desconocido. En este artículo se presenta este problema y se dan algunos ejemplos negativos de su influencia, en particular en lo que respecta a la interpretación ingenua de la llamada heurística de Polya relativa a la resolución de problemas de Matemática.

Palabras clave: Deslizamiento Metadidáctico - Resolución de Problemas - Heurística de Polya.

Polya y la Resolución de Problemas

La producción de carácter divulgativo, no científica, del gran matemático húngaro – estadounidense George Polya (1887 – 1985) se desarrolló entre 1945 y 1967; se compone de dos famosos libros traducidos en varios idiomas: 1. *How to Solve It*; 2. *Mathematics of Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*; *Mathematics of Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Reasoning*. (Polya, 1945/1967, 1954). En estos libros divulgativos, Polya ilustró y evidenció al público su forma personal de afrontar y de resolver problemas, una técnica genial, admirada por todos aquellos matemáticos que han apreciado sus excelentes resultados en probabilidad, teoría de números, cálculo combinatorio y en el estudio de series particulares. Valiosa, por el conocimiento de la obra de Polya, es su extensa y docta memoria póstuma escrita por el matemático estadounidense Ralph Philip Boas (1912 – 1992) quien fue también co-autor de Polya (Boas, 1990).

Este tipo de análisis no es único en el mundo de la Matemática, por el contrario, sigue por así decirlo una tradición.

Por ejemplo, en 1910 el psiquiatra y periodista francés Édouard Toulouse (1865 – 1947) publicó un célebre libro en el cual narra los análisis que realizó a finales del s. XIX – inicios del s. XX sobre Henri Poincaré (1854 – 1912), uno de los más geniales creadores matemáticos de toda la historia (Toulouse, 1910), después de haber observado por mucho tiempo su forma de trabajar y de haber dialogado con él sobre sus hábitos en el trabajo y sobre sus modalidades de pensamiento creativo. De este libro surge un Poincaré matemático – ser humano, que se aleja del estereotipo de la figura del matemático, desde múltiples puntos de vista (D'Amore & Sbaragli, 2020).

También el gran matemático francés Jacques Hadamard (1865 – 1963), famoso por sus excelentes resultados en el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales, por su teorema sobre los números primos, por una desigualdad y por una matriz que lleva su nombre, por sus estudios en Mecánica cuántica, dedicó tiempo y energía a estudiar lo que el mismo llamó "psicología de la invención en Matemática" que tuvo un éxito extraordinario. El volumen original es de 1945 y aún hoy se publica (Hadamard, 1945). Hadamard no recurre a psiquiatras, él mismo realiza la investigación; llega a afirmar que el pensamiento matemático es una actividad que no se apoya en palabras, por el contrario, el pensamiento matemático se sirve de imágenes mentales y de sensaciones de diverso tipo. Por su investigación, en los primeros años del siglo XX entrevistó un centenar de estudiosos entre matemáticos y físicos [entre los cuales Albert Einstein (1879 – 1955)] y se observó a sí mismo en el trabajo, con el fin de mostrar que las sensaciones creativas se manifiestan a través de sensaciones físicas.

A diferencia de lo que se ha escrito sobre Poincaré y Hadamard, la narración de los métodos de Polya y la confesión pública de cómo logró sus resultados se transformaron, para algunos lectores de la época, en una especie de "metodología general de la resolución de problemas", algo como una "heurística exitosa" que, con consideraciones superficiales, fue anunciada como una modalidad para usar en el aula. Las "reglas" internas y personales, que Polya enumera y describe brillante y generosamente con ejemplos, fueron consideradas ingenuamente como una vía maestra digna de ser seguida en el proceso de enseñanza, con la convicción de que el aprendizaje sería su lógica consecuencia.

En aquellos tiempos no se hablaba de Didáctica de la Matemática como disciplina, aún no se había creado; inició a concebirla Guy Brousseau precisamente a finales de los años '60, continuando a todo lo largo de la década de los '70, y terminando con la creación propiamente dicha de una verdadera teoría del aprendizaje de la Matemática a finales de los años '80.

Ahora, lo que quería proponer a sus lectores Polya era y es muy claro aún hoy, tomando como base sus mismas palabras: proponerse a sí mismo como modelo, dado que se trata de un modelo exitoso; y proponer sus etapas como ejemplos que cualquiera podría seguir.

Hoy, si bien la historia de estos instrumentos personales de gran eficacia como el caso de Polya son considerados de gran interés histórico y psicológico, nadie osaría considerarlos científicamente idóneos para estudios de Didáctica de la Matemática con una aplicación directa en aula. Tal vez esto vendría a la mente de quienes no han estudiado o han estudiado mal la Didáctica de la Matemática. Normalmente los instrumentos de Polya son aclamados o citados favorablemente por quien no sabe lo que ha sucedido en las últimas décadas gracias a la Didáctica de la Matemática y a la investigación que se ha desarrollado en su interior. A costa de repetirnos, por tanto, reiteramos que una eventual citación de Polya desde una perspectiva histórica o tal vez psicológica puede ser interesante, pero, ciertamente no desde un punto de vista didáctico, como lo mostraremos en los próximos parágrafos.

Antes de abordar este argumento específico, debemos presentar uno de los temas de investigación que la disciplina Didáctica de la Matemática ha afrontado en las últimas décadas.

El (negativo) fenómeno del deslizamiento metadidáctico

El uso en la práctica didáctica de sistemas heurísticos elevados a modelos que sustituyen el aprendizaje de la Matemática con el aprendizaje de una analogía, lo más algorítmica y secuencial posible, se ubica en el estudio de un fenómeno negativo y contraproducente evidenciado por la investigación propiamente enmarcada en Didáctica de la Matemática que se incluye bajo la denominación de "deslizamiento metadidáctico". Sin embargo, este fenómeno difundido y peligroso es, en ocasiones, incentivado por los mismos docentes.
Este fenómeno se presenta cuando se pasa del estudio de un tema de matemática T, que debería constituir un objeto de aprendizaje, al estudio de los instrumentos que al máximo podrían servir únicamente o para ilustrar el tema T o para afrontar la resolución de un problema relacionado con aquel tema T, como un esquema banal y no como un aprendizaje verdadero (lo cual implicaría, como lógica consecuencia, la resolución correcta, apropiada y general de problemas relacionados con el tema T). Pero, si el deslizamiento tiene éxito, el estudiante aprende un esquema, o un algoritmo, o un ejemplo generalizado, no el tema T. Algunos docentes (cuando no conocen los resultados de la Didáctica de la Matemática) confunden estos dos niveles, aceptando en buena fe la situación que aparece superficialmente como positiva; inclusive, a veces ellos mismos la crean y la proponen en aula, confiados en las sugerencias de los "expertos", y, por tanto, se crea una ilusión perfecta: todos están satisfechos. Pero el tema matemático T sigue siendo para el estudiante (y, en ocasiones, también para el docente) un misterio.

Para entender mejor la situación, sugerimos dos ejemplos elegidos entre los de mayor difusión en el mundo escolar.

1. Consideramos problemas de este tipo, con gran presencia en el mundo escolar de todo el mundo: «3 obreros hacen un determinado trabajo en 9 horas; pero si los obreros que realizan el mismo trabajo son 6, ¿cuántas horas de trabajo se requieren para realizarlo?». Se trata de una proporción con un término desconocido. $a : b = c : d$.

Para entender y de consecuencia resolver conscientemente este tipo de problemas se ideó hace mucho tiempo un mecanismo gráfico conocido en todo el mundo como "regla de 3". Dicho modelo transforma la formulación aritmética en un gráfico y esto parece hacer que la resolución del problema sea más efectiva. Pero, como ha sucedido y sucede en todos los países, después de un tiempo no se vuelve a hacer referencia ni al problema ni al tema de la proporcionalidad, tan sólo se hace referencia al gráfico. Aprender a usar la regla de 3 sustituye aquello que en origen era el verdadero objeto de aprendizaje: conocer y saber usar el objeto matemático "proporciones".
El estudiante aprende a manejar y a usar este gráfico (con flechas que tienen sentidos concordantes o discordantes) e, incluso si puede encontrar el resultado de ese problema propuesto, no aprende a resolver el problema o problemas similares porque no ha aprendido la idea de proporcionalidad. Sólo logró individuar la forma correcta de colocar las flechas. Si olvida la regla de 3 o si se equivoca en la colocación de las flechas, no podrá resolver este tipo de problemas: el estudiante no razona, busca la regla, el algoritmo. Tanto es así que, si el término desconocido no es c sino d, el estudiante en muchas ocasiones no sabe qué hacer, es decir, como colocar las flechas.

2. Otro ejemplo funesto se verificó con la llegada a las aulas de la teoría ingenua de conjuntos en los años '70 y '80, como consecuencia de una idea sobrestimada de algunos matemáticos de un cierto prestigio, con buenas intenciones, pero con poca relación con los problemas de enseñanza – aprendizaje. Después de algunos años, se introdujo en el mundo de la escuela el problema de la representación de los objetos de la teoría de conjuntos y fue así como se pensó en usar círculos o elipses para indicarlos. Bastó poco tiempo para dejar de estudiar la teoría de conjuntos, y se comenzó a teorizar sobre cómo dibujar y usar los gráficos, transformando todo el proceso de aprendizaje de la teoría ingenua de conjuntos en el dominio de esta actividad, puramente gráfica, de bajo nivel.
Por tanto, si los estudiantes aprendían algo, no aprendían la lógica como lenguaje de base de la Matemática, lo cual era el objetivo inicial, aprendían a dominar el dibujo de los gráficos. Otro deslizamiento metadidáctico. Afortunadamente, el desorden que siguió a todo esto sirvió para eliminar este inútil contenido matemático de los programas de estudio de matemática, esto también gracias a la intervención de otros matemáticos de idéntico prestigio (D'Amore, 1999).

La Heurística de Polya y el Deslizamiento Metadidáctico

Hemos identificado fenómenos de este tipo como *deslizamiento metadidáctico* (Brousseau & D'Amore, 2018) (del francés *glissement metadidactique*).

Estos fenómenos normalmente aparecen después de una derrota, después de un fracaso didáctico, generalmente inevitable; pero el hecho no viene inmediatamente reconocido como fracaso, por los medios que ofrece la enseñanza tradicional. Los docentes explican, después explican la explicación, después ilustran y vuelven a explicar la ilustración … Cada vez los intentos de corregir los fracasos iniciales son inadecuados. El fenómeno se amplifica siempre más y se vuelve rápidamente incontrolable, como lo hemos confirmado con los ejemplos precedentes.

La "heurística de Polya" y la enseñanza de sus presuntos "métodos" (de tipo pseudo-algorítmicos) de problem solving son otro peligroso ejemplo de deslizamiento metadidáctico que algunos docentes no logran ni siquiera reconocer. Las dificultades bien conocidas que los estudiantes encuentran en el proceso de resolución de problemas dejan generalmente a los docentes desarmados.

El estudiante posee un conocimiento "propio" pero, sin embargo, no encuentra los medios para hacer uso de este conocimiento en el momento de resolver un problema propuesto por el docente. Una clásica respuesta ingenua proporcionada por los docentes, en los primeros años de formación, es presionar para que se resuelvan problemas similares de tal manera que el estudiante pueda luego reproducir la solución enseñada en un caso similar. Y esto se asemeja a lo que Polya propone en su heurística; pero sin ninguna responsabilidad de parte suya: él no quería proponer una metodología didáctica, quería sólo mostrar su forma personal de actuar y sugerirla a quien deseara copiar su modalidad de investigación.

El estudiante no tiene obviamente necesidad de saber si la respuesta es adecuada o el porqué de esta respuesta; es suficiente que esta respuesta se ajuste al modelo previsto por su docente. El estudiante puede, por tanto, responder sólo en el ámbito del contrato didáctico sin ni siquiera entender la razón por la que su respuesta es correcta. El estudiante simula / adopta / usa / propone una solución que podría incluso no entender; el docente la acepta e incluso la alaba: y esto basta para toda la sociedad.

En una forma más concreta de guiar a sus lectores, Polya expone consejos neo-cartesianos para la organización del trabajo de resolución de problemas: comprender la pregunta, conectarla con el conocimiento que se posee, descomponerla en fases más simples, … Polya sugiere incluso intentar con pasos aún más heurísticos: buscar semejanzas, un ejemplo, un contraejemplo, generalizaciones, comparaciones, … Este trabajo introspectivo y generoso, fue utilizado por didactas ingenuos como base para un infructuoso intento de enseñar a resolver problemas cuya base está en el uso de dichas heurísticas.

Toda esta actividad es claramente un deslizamiento metadidáctico: la resolución de problemas (como actividad matemática de gran interés, tal vez la más genuina) es olvidada, sustituida por un estudio de procedimientos elementales (cartesianos, de hecho) para alcanzar dichas soluciones. Los ejemplos proporcionados son de naturaleza tranquilizadora y hacen que los estudiantes incluso menos brillantes sean más competitivos. Pero es claro que la situación ha cambiado sin cambiar la naturaleza: el estudiante busca aplicar su heurística, así como intentó aplicar su conocimiento, y por esto el éxito no está garantizado, a menos que se propongan problemas elegidos ad hoc, sobre la base de los acuerdos implícitos o explícitos en el ámbito del contrato didáctico. Lo cual es lo que se observa: una retahíla de propuestas llamadas "problemas" (que en realidad son ejercicios) todos iguales.

El engaño didáctico es fatal. La única diferencia es que los saberes matemáticos significativos contienen en sí las mismas condiciones de validez, lo cual no sucede en el caso de las heurísticas que son sólo conocimientos y no saberes. Tratarlas como saberes es un error epistemológico y didáctico.

El esfuerzo personal y generoso de Polya de proponer su forma personal de trabajar como sugerencia heurística (que no tenía el objetivo de hacer dejar de aprender, sino todo lo contrario) se ha transformado lentamente en un proceso peligroso y contraproducente. Su sugerencia metodológica sigue siendo un buen ejemplo histórico y personal, pero que no tiene cabida en el mundo de la praxis didáctica escolar, como lo sabemos hoy que hemos aprendido mucho sobre este argumento de la investigación científica en Didáctica de la Matemática.

Comprendemos que un error o un fracaso lleve a la persona involucrada, docente / estudiante, a transferir la propia atención de la actividad en curso a uno de los medios de control o de conocimiento de esta misma actividad. Este medio de control no es un verdadero conocimiento, menos aún, un saber; es como si fuera un meta-conocimiento: no tengo este conocimiento, pero sé lo que debo hacer, lo que se espera de mí; por tanto, intento hacerlo.

Por ejemplo, para realizar una actividad relativa a un tema de saber S, quien está interesado (A) utiliza un medio M que se muestra insuficiente; para remediar esto, A no sabe de deber acceder a S para dominarlo, centra toda su atención en M, ignorando a S, intentando mejorar M transformándolo en un instrumento idóneo. A está de esa manera entrando sin escapatoria en el proceso que constituye un deslizamiento meta-didáctico.

Dicho deslizamiento meta-didáctico consiste para el docente en cambiar el objeto de enseñanza de una actividad (resolución de problemas) o de una noción, sustituyéndolo con uno de sus medios de control o de puesta en evidencia. Este deslizamiento se produce, en particular, cuando el medio es inapropiado o cuando el sistema (alumno / docente) no puede abandonarlo ni rechazarlo, dado que ha sido impuesto por el docente mismo o por la praxis difundida o por la institución. Es una forma de doblegarse al poder del contrato didáctico, a uno de sus efectos tóxicos (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2020).
Otra consecuencia altamente negativa de esta ingenua interpretación didáctica de las sugerencias de Polya, se estableció hace unos veinte años cuando se difundió en el mundo occidental la idea perniciosa de hacer preceder la resolución de problemas con la realización lo que se llamaron "diagramas de flujo" (que en realidad eran diagramas de bloques) inspirados en los recientes éxitos de la informática.
En este caso se constató el hecho que para los estudiantes de primaria la realización de esta actividad presentaba una complejidad aún mayor que la resolución misma del problema; el simbolismo esquemático, que tenía el objetivo de ayudar, se volvió objeto mismo de enseñanza, por tanto, de aprendizaje y de la actividad misma de resolución, lo cual constituye un "deslizamiento metadidáctico".
En el proceso de nuestras investigaciones encontramos declaraciones espontáneas de estudiantes que admiten saber resolver el problema, pero que no saben construir este instrumento (pretendido por el docente) cuyo significado es misterioso pero que supuestamente debería ayudarlos. Afortunadamente, la violenta lucha de los estudiosos de didáctica y el sentido común de los docentes han iniciado a eliminar esta infeliz praxis que desafortunadamente aún hoy resiste.
Entre las nocivas y deprimentes transformaciones que la idea genial de Polya tuvo, la más difundida, es una secuencia "absolutamente eficaz" para llegar a la resolución de todo tipo de problemas; consta de una sucesión de normas concretas de comportamiento casi algorítmicas que se deben seguir atentamente para alcanzar el éxito:

- leer atentamente el texto del problema, si es necesario más de una vez;
- hacer un círculo con el color rojo alrededor de los datos del problema (que en la mente de muchos docentes son siempre números);
- leer más de una vez la pregunta y después subrayarla con un color diferente al usado para los datos;
- identificar en el texto del problema la "palabra clave" que indica la operación que debe realizarse con los datos identificados (por ejemplo, "en todo" significa que debe usarse la adición, "perder o regalar" significa que debe usarse la sustracción);
- realizar la operación con los datos, encontrar el resultado de dicha operación;
- el resultado encontrado es la respuesta correcta al problema.

Esta situación es tan incorrecta didácticamente que crea desasosiego tan solo pensar que alguien la haya formulado de esta forma y que circule en las escuelas; de hecho, lo hemos encontrado escrito con caracteres grandes a modo de cartelón a disposición de los alumnos.
El contrato didáctico reina soberano, parece como si se quisiera hacer que el niño fracase en Matemática y que sea capaz de resolver únicamente problemas pre-confeccionados según un automatismo establecido a priori, un acuerdo preciso entre docentes y alumnos.
Podemos ahora hacer un gran número de contraejemplos a estas supuestas estrategias "exitosas" dado que son recabadas de las reglas de Polya, pero nos parece ofender la inteligencia del lector al pensar que él pueda tener esta necesidad. De todas formas, todo esto ya ha sido argumento de otros artículos nuestros, donde se han dado varios ejemplos en este sentido. Aquí nos eximimos de hacerlo.

Conclusiones

Conocimientos y saberes forman una pareja de metaconocimiento con mutuas influencias recíprocas. El conocimiento es el medio implícito para activar y gestionar los saberes. Los saberes son los instrumentos institucionales y culturales que permiten aprender los conocimientos, propios y de los otros. Querer tratarlos de manera unívoca, en particular pensar el conocimiento como un saber, constituye un deslizamiento metadidáctico permanente. Cada conocimiento implícito en un saber requiere, para funcionar, nuevos conocimientos que, una vez fijados, no pueden ser considerados como tales. Resultan errores, malentendidos, fracasos que relanzan exigencias imposibles y prácticas ineficaces. Desde una visión económica, los conocimientos disponibles en aula son el capital y los intereses son los saberes adquiridos; es implícito el sutil e incierto juego de los conocimientos vivos, dudosos y fugaces con los saberes seguros y compartidos, el juego del dicho y del no dicho.
Antes de pretender "mejorarlo" con medidas coyunturales y drásticas, es mejor, como mínimo, estudiarlo con humildad.

Se puede ver el texto: D'Amore y Fandiño Pinilla (2021) [Traducción de José Leonardo Prieto Fandiño].

Referencias Bibliográficas

Boas, R. P. (1990). George Pólya, Deciembre 13, 1887 – September 7th, 1985. National Academy of Sciences (Eds.), *Biographical Memoirs: Volume 59* (pp. 338–355). Washington, DC: National Academy of Sciences.
https://www.nap.edu/catalog/1652/biographical-memoirs-v59
http://www.nasonline.org/member-directory/deceased-members/51577.html

Brousseau, G., &D'Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica. De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41-54. DOI: 10.24844/EM3003.02.
http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol30/3/02_REM_30-3.pdf

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prologo de Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prólogos de Guy Brousseau, Colette Laborde, Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio].

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2021). Some examples of the phenomenon of metadidactic slippage in school practice. *Acta Scientiae*, *23*(4). 1-15. [In English and Spanish]. http://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/article/view/6647

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). *Gli effetti del contratto didattico in aula. Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2018). *El contrato didáctico en Educación Matemática*. Prólogo y epílogo de Guy Brousseau. Bogotá: Magisterio].

D'Amore, B., &Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. IV vol. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefación de Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.

Hadamard, J (1945/1993). *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*. Milano: Raffaele Cortina. [Ed. orig. 1945: *Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover].

Pólya, G. (1945/1967). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica e euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli. [Ed. or. 1945: *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press].

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1: Induction and analogy in mathematics. Vol. 2: Patterns of plausible inference.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Toulouse, É. (1910). *Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle: Henri Poincaré.*Paris: Flammarion.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y TECNOLOGÍAS DIGITALES: PLANEAMIENTO DE TAREAS DE INVESTIGACIÓN CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES

Claudia Lisete OLIVEIRA GROENWALD

Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Brasil

claudiag@ulbra.br

Introducción

Las condiciones que impone la vida moderna, cuando estamos llamados a actuar en un mundo en constante cambio, cada vez más dependiente de las tecnologías y que, en todo momento, nos presenta nuevos retos, tanto individuales como colectivos, exigen que los individuos desarrollen autonomía, capacidad de resolución de situaciones problemáticas, tomar decisiones, actuar en beneficio de su entorno social.
En este contexto, la Educación, y en particular la Educación Matemática, tiene la responsabilidad de desarrollar un trabajo que permita a los estudiantes, desde temprana edad, actuar en entornos que contribuyan a su formación como ciudadanos activos en este mundo cada vez más exigente. En el corazón del marco de competencias clave está la capacidad de las personas para pensar por sí mismos, expresando madurez moral e intelectual y asumiendo la responsabilidad de su aprendizaje y acciones (OCDE, 2005).
En este sentido, es importante discutir el aprendizaje para la formación del ciudadano que actuará en la sociedad en estos tiempos modernos. Según Illeris (2013) el aprendizaje es un tema complejo, que abarca un campo mucho más amplio de lo que tradicionalmente se entiende, como es la adquisición de conocimientos y habilidades. El aprendizaje para el autor incluye dimensiones emocionales, personales y sociales.

Aprendizaje de los Estudiantes

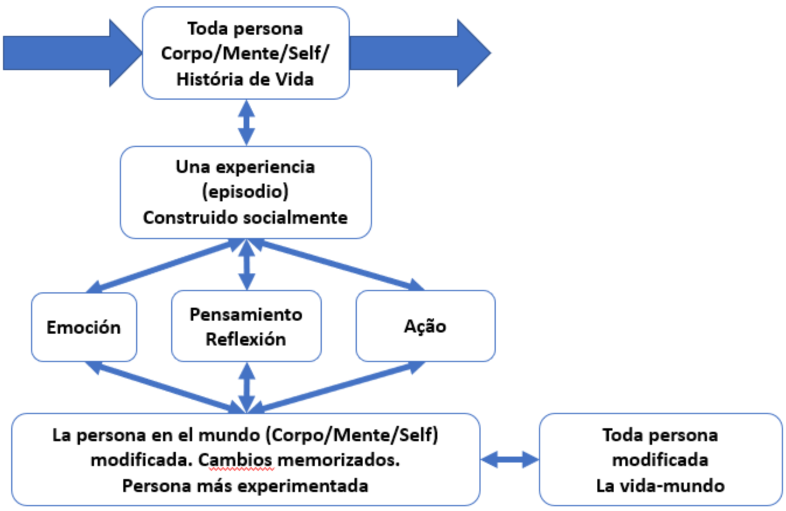
Según Illeris (2007, p. 3): "El aprendizaje puede definirse de manera amplia, como cualquier proceso que a un cambio permanente en las capacidades y no se deba únicamente a la maduración biológica o al envejecimiento".
Para el autor todo aprendizaje conlleva la integración de dos procesos muy diferentes: un proceso externo de interacción entre el individuo y su entorno social, cultural o material, y un proceso psicológico interno de elaboración y adquisición.
Para Illeris (2013), todo aprendizaje implica tres dimensiones: contenido, incentivo y entorno. La dimensión del contenido se refiere a lo aprendido, como conocimientos y habilidades, así como opiniones, percepciones, significados, posturas, valores, formas Observación reflexiva de actuar, métodos, estrategias, etc., lo que lleva al individuo a construir significado y capacidad para hacer frente a los desafíos de la vida práctica. La dimensión del incentivo proporciona y dirige la energía mental al proceso de aprendizaje, involucrando sentimientos, emociones, motivación y volición, asegurando el equilibrio mental continuo del individuo desarrollando una sensibilidad personal. La dimensión de interacción proporciona los impulsos que inician el proceso de aprendizaje, a través de la percepción, transmisión, experiencia, imitación, actividad, participación, etc., formando la integración personal en la sociedad, construyendo así la sociabilidad del individuo.

Figura 1 - Ciclo de aprendizaje de Kolb

Fuente: adaptado de Kolb (1984).

Según Kolb (1984, p. 38): "el aprendizaje es el proceso por el cual el conocimiento es creado por la transformación de la experiencia", donde la experiencia no es conocimiento, sino la base para la creación de conocimiento. El autor sugiere la representación del ciclo de aprendizaje (Figura 1) en una perspectiva holística e integradora sobre el aprendizaje que combina experiencia, percepción, cognición y comportamiento.
Kolb (1984) considera valiosas las experiencias concretas e inmediatas para crear sentido y validar el proceso de aprendizaje, así como la investigación-acción y la enseñanza de laboratorio, que se caracterizan por el proceso de retroalimentación, en el que "la información ofrecida por la retroalimentación es el punto de partida de un proceso continuo, que consiste en la acción orientada al objetivo y la evaluación de las consecuencias de esta acción" (Elkjaer, 2013, p.104).
Según Kolb (1984) el aprendizaje está vinculado a las capacidades mencionadas en el ciclo de aprendizaje de la Figura 1 y los estudiantes deben estar plenamente involucrados en nuevas experiencias, siendo capaces de reflexionar y observar experiencias desde diversas perspectivas, creando conceptos que integren sus observaciones en teorías que llevan a la toma de decisiones y la resolución de problemas.
Para Jarvis (2013), aprendemos con la experiencia cuando le atribuimos significado, y cuando aprendemos, cambiamos como persona. Para el autor no es necesario tener un significado para aprender con la experiencia, sino que la reflexión sobre las experiencias lleva a la resignificación, las emociones se transforman, las opiniones, actitudes y valores se ven afectados, influyendo en la toma de decisiones y la acción.
El aprendizaje es continuo (Figura 2) y por mucho que sigamos aprendiendo, seguimos siendo personas inacabadas y la posibilidad de más crecimiento, más experiencia, permanece (Jarvis, 2013). Para el autor "el ser y el devenir se entremezclan, y el aprendizaje humano es uno de los fenómenos que une a los dos, porque es fundamental para la propia vida" (Jarvis, 2013, p. 40-41) así, a través del aprendizaje, el conocimiento, las habilidades, las actitudes, las emociones, las creencias, los valores, los sentimientos y la identidad cambian y evolucionan.

Figura 2 - La transformación de la persona mediante el aprendizaje



Fuente: Jarvis (2013).

Las investigaciones del GECEM sobre el aprendizaje, en este caso el aprendizaje matemático, conducen a una comprensión de la necesidad de actividades / tareas que hacen que los estudiantes se involucren, reflexionen, formulen hipótesis, saquen conclusiones y generalicen. Dando lugar a la planificación de tareas de investigación que permitan el desarrollo de estas capacidades.

Tareas de Investigación con el uso de recursos digitales

Penalva y Llinares (2011), Llinares, Buforn y Groenwald (2019), afirman la necesidad de que los docentes mantengan en cuenta los objetivos a alcanzar y cómo alcanzar dichos objetivos utilizando recursos, como tareas matemáticas, a la hora de planificar sus clases. Para estos autores, las tareas matemáticas son las propuestas que hacen los profesores para el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, son las proposiciones realizadas por el profesor con el objetivo de centrar la atención de los alumnos en lo que se pretende enseñar y definir qué actividad es un conjunto de tareas a desarrollar por los alumnos y los procedimientos son las formas de realizar las tareas.

Stein, Grover y Henningsen (1996, p. 460) definen una tarea como "una actividad en el aula cuyo objetivo es centrar la atención de los estudiantes en un tema en particular".

Las tareas matemáticas pueden variar desde un conjunto de ejercicios de rutina hasta un problema complejo y desafiante que centra la atención de los estudiantes en una idea matemática en particular (NCTM, 2015). Según NCTM (2015), la enseñanza efectiva utiliza las tareas como una forma de motivar el aprendizaje de los estudiantes y ayudarlos a construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.

Se entiende que es posible establecer un vínculo entre el aprendizaje y la gestión de tareas siempre que ellos, las tareas, hagan que el estudiante vaya por un camino claro hacia la comprensión de los contenidos matemáticos (Llinares, 2011; Llinares, Buforn y Groenwald, 2019; Damasco, Groenwald y Llinares, 2020). Solo las tareas no son suficientes para el aprendizaje, pero son factores que pueden contribuir al logro de los objetivos propuestos y al aprendizaje de los estudiantes. Para ello, los autores refuerzan que las tareas deben permitir a los estudiantes pensar en hacer matemáticas, superando la memorización y los procedimientos sueltos, sin conexión.

Para los autores uno de los elementos importantes para el aprendizaje de las matemáticas son los problemas, actividades y ejercicios que el profesor propone a sus alumnos (tarea). Penalva y Llinares (2011) consideran importante la tarea matemática, porque es la que determina qué pueden aprender los alumnos y cuál es el camino a ello, en este sentido las tareas, según los autores, son los instrumentos que el profesor utiliza para que los alumnos aprendan matemáticas, por lo que existe un vínculo entre el aprendizaje y la gestión o gestión de tareas en el aula. No son solo las tareas las que permiten a los alumnos aprender, sino qué harán con él y, como lo dirige el profesor, entendiendo que, si los alumnos realizan únicamente actividades de reproducción de procedimientos previamente introducidos, con el objetivo de memorizar algoritmos, difícilmente podrán alcanzar otros objetivos o difícilmente ampliarán sus conocimientos en relación con lo estudiado.

Así, se entiende que una tarea es una actividad de aula que involucra a estudiantes con asignaturas, contenidos y conceptos matemáticos, configurándose "como un vehículo importante para el desarrollo de la capacidad del estudiante para pensar y razonar matemáticamente[1]" (Stein, Grover, Henningsen; 1996, p. 455).

Considerando que las tareas matemáticas pueden influir, estructurar y comandar la forma en que los profesores organizan sus clases y cómo los estudiantes perciben y aprenden matemáticas, entendemos la importancia de las investigaciones en la planificación y organización de tareas de alta demanda cognitiva (procesos de pensamiento). Dado que la relevancia de la relación entre el proceso de pensamiento (nivel de requerimiento cognitivo) y las tareas matemáticas es la principal imagen de las investigaciones de GECEM.

Refiriéndose a los procesos de pensamiento, Doyle (1988), hizo una diferenciación primaria entre ellos. Reconoció que, si, por un lado, había tareas que requerían procesos más elementales, como la reproducción precisa de contenidos previamente aprendidos, por otro lado, había tareas que requerían un razonamiento más complejo, como las que implicaban la compresión y conexión de los contenidos ya estudiados. Los niveles cognitivos se intercalan "entre tareas que involucran a estudiantes en el nivel superficial y tareas que involucran a estudiantes en un nivel más profundo, que requieren interpretación, flexibilidad, organización de recursos y construcción de significados[2]" (Stein, Grover, Henningsen; 1996, p. 459).

Para Penalva y Llinares (2011) el término Demanda Cognitiva se ocupa de la clase y el nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para resolver la tarea, señalando lo que se logra y lo que se aprende en cada nivel.

Smith y Stein (1998) clasifican los niveles de demanda cognitiva en cuatro, con los niveles 1 y 2 como demandas de bajo nivel, y los niveles 3 y 4 como demandas de alto nivel:

- Nivel 1 **-** tareas que requieren memorización;
- Nivel 2 **-** tareas que utilizan procedimientos sin conexión;
- Nivel 3 **-** tareas que utilizan procedimientos con conexión;
- Nivel 4 **-** tareas que requieren "hacer matemáticas".

Las tareas de memorización de nivel 1 implican reproducir fórmulas, reglas, hechos o definiciones previamente aprendidas o ya establecidas y que no pueden ser resueltas a través de procedimientos, porque no existen o porque el tiempo determinado para resolver la tarea es breve para emplear el procedimiento; No son ambiguas, estas tareas implican reproducir exactamente algo visto anteriormente y lo que hay que

[1] Propia traducción

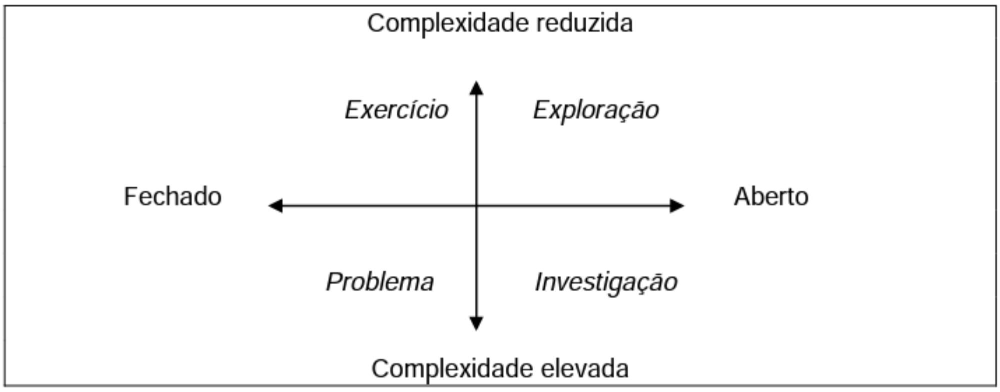
[2] Propia traducción

reproducir se establece clara y directamente; No tiene relación con los conceptos o significados que subyacen a los hechos, reglas, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.
Las tareas de nivel 2 son tareas de procedimientos sin conexión, son algorítmicas, utilizan procedimientos que están específicamente definidos, o su uso es obvio en función de la información que se encuentra en la tarea planificada; Requiere un requerimiento cognitivo limitado para lograrlo con éxito; Hay poca ambigüedad de lo que hay que hacer y cómo hacerlo; no tienen relación con conceptos o significados subyacentes al procedimiento utilizado; Se centran en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar la comprensión matemática; No requieren explicaciones, o solo explicaciones centradas en describir el procedimiento utilizado.
Las tareas de nivel 3 son tareas de procedimientos con conexión, que se centra en la atención del estudiante en el uso de procedimientos, con el fin de desarrollar una comprensión de los conceptos e ideas matemáticas; Sugiere formas (explícita o implícitamente) que son procedimientos generales, que tienen una estrecha relación con las ideas conceptuales, en lugar de algoritmos que no están claros en relación con los conceptos subyacentes; De manera habitual, se representan en varias formas (diagramas visuales, gráficos, material concreto, símbolos, situaciones problemáticas); Hay conexiones entre múltiples representaciones que ayudan a desarrollar el significado matemático; Requieren un cierto grado de esfuerzo cognitivo; Aunque es posible seguir los procedimientos generales, no se pueden usar sin pensar, los estudiantes deben involucrarse con las ideas conceptuales detrás de los procedimientos para realizar con éxito la tarea.
Las tareas de nivel 4 son aquellas que necesitan hacer matemáticas porque requieren un pensamiento complejo y no algorítmico (no hay aproximación con caminos ya recorridos en otras tareas que puedan ser recordados o un camino que sea sugerido explícitamente por la tarea o instrucción previa); Requieren que los estudiantes exploren y comprendan conceptos matemáticos, así como procesos y sus relaciones; Requieren auto-verificación o autorregulación de los procesos cognitivos; Requieren que los estudiantes encuentren una respuesta que requiera la comprensión conceptual de la noción matemática, verificando y explicando la respuesta producida; Exigir a los estudiantes que accedan a conocimientos o experiencias relevantes y hagan un uso adecuado de ellos en el desarrollo de la tarea; Requieren un esfuerzo cognitivo considerable, y pueden implicar un cierto nivel de ansiedad de los estudiantes, debido a la naturaleza imprevisible del proceso de resolución requerido.
Según Stein y Lane (1996), la investigación ha demostrado que la mejora del aprendizaje de los estudiantes está relacionada con el trabajo con tareas de alta demanda cognitiva (Stein, Lane; 1996). Se entiende que todo tipo de tareas son importantes y tienen su papel en el aprendizaje, pero las de alta demanda cognitiva son palancas del pensamiento matemático y del aprendizaje del alumno.
Se entiende que la actividad de alta demanda cognitiva son actividades abiertas que permiten la investigación y resolución de problemas. Investigar es descubrir relaciones entre objetos matemáticos conocidos o entre estos y nuevos objetos matemáticos, tratando de identificar y probar sus propiedades (Ponte, 2021). Para el autor los momentos en la realización de una investigación son:

- Exploración y formulación de cuestiones, lo que implica reconocer la situación, explorar y formular preguntas;
- Formulación de conjeturas, que implica las actividades de organizar los datos y formular conjeturas;
- Prueba y reformulación de conjeturas, que implica realizar pruebas y refinar hipótesis;
- Justificación y evaluación, que implica justificar una conjetura y evaluar el razonamiento o el resultado del razonamiento.

Según Ponte (2010), el objetivo principal de la Investigación Matemática es encontrar regularidades, reflexionar sobre los temas, justificarlos y probarlos, generalizar contenidos. "Investigar es descubrir relaciones entre objetos matemáticos conocidos o desconocidos, buscando identificar sus propiedades" (Ponte, 2010, p.13).
La investigación en Matemáticas incluye la formulación de preguntas, que a menudo evolucionan a medida que avanza el trabajo. La investigación también implica la producción, el análisis y el refinamiento de conjeturas sobre estos mismos temas. Y, por último, implica la demostración y comunicación de los resultados. El punto de partida para una investigación puede ser un problema matemático o una situación no matemática (tanto de otras ciencias y tecnología, como de la organización social o de la vida cotidiana) (Ponte, 2010).
Para Ponte (2010) una tarea tiene cuatro dimensiones fundamentales (Figura 3): el grado de complejidad, la estructura, el contexto referencial y el tiempo requerido para su resolución. Combinando las dos primeras dimensiones, se obtienen cuatro tipos básicos de tareas:

Figura 3 – Dimensiones de la tarea



Fuente: adaptado de Ponte (2010).

Es decir, las investigaciones de GECEM se centran en la planificación de tareas de investigación abierta de alta demanda cognitiva, es decir, de alta complejidad, con apoyo en tecnologías.
Otro punto es que en el campo de la Educación Matemática, las Tecnologías de la Comunicación y la Información - TIC e Investigación Matemática han sido señalados como una de las tendencias metodológicas de la enseñanza que favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos, así como la oportunidad de hacer conjeturas y generalizar.
Así, se percibe que en entornos de aprendizaje es interesante combinar la investigación Matemática con *software* educativo, como el *software* GeoGebra, que puede brindar oportunidades para la creación, manipulación, exploración de situaciones, análisis, elaboración de conjeturas, verificación de regularidades, discusión de resultados y generalización.
En este sentido, es necesario diseñar tareas que puedan ser el punto de partida de las investigaciones y exploraciones matemáticas de los alumnos y discutir cómo se pueden trabajar en el aula. Las tecnologías pueden hacer una contribución significativa a esto. A continuación, se muestran ejemplos de tareas utilizando objetos de aprendizaje desarrollados por GECEM, que son tareas de investigación que, a nuestro entender, llevan a los estudiantes a realizar investigaciones en matemáticas.

Tarea Investigativa: un ejemplo

La tarea presentada en la Figura 4 fue desarrollada en el *software* GeoGebra y se puede encontrar en: *http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio*. Está indicado para estudiantes que se encuentran en los últimos años de la escuela primaria (6º a 9º grado) con edades comprendidas entre los 11 y los 14 años de edad.

Figura 4 – Tarea investigativa com fracciones

<table>
<tr><td colspan="2">Considere una fracción y analice lo que sucede cuando agrega un valor cualquier al numerador y al denominador simultáneamente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La idea es que, en parejas o en grupos de 3 o 4 alumnos, discutan y reflexionen sobre las posibilidades para la tarea propuesta y hacer tantos ejemplos como sea necesario para sacar conclusiones</td></tr>
<tr><td>

Situación 1

Para $\frac{a}{b}$, con $a < b$, tenemos:

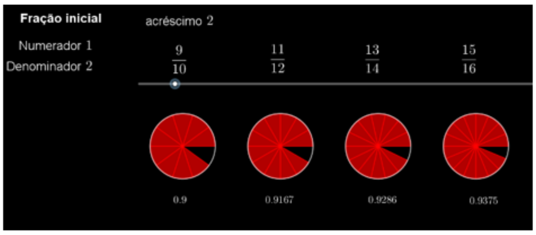
$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{a+2}}{\boldsymbol{b+2}} < \frac{\boldsymbol{a+4}}{\boldsymbol{b+4}} < \cdots < 1$$

En el ejemplo presentado tenemos:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} < \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} < \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}} < \cdots < 1$$

Resulta que las fracciones se acercan a 1 pero nunca llegan a 1

</td><td>



</td></tr>
<tr><td></td><td>

</td></tr>
<tr><td>

Situación 2

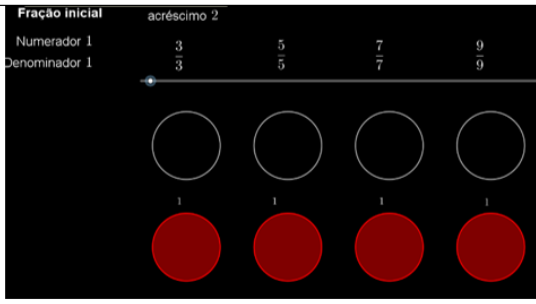
Para $\frac{a}{b}$, con $a = b$, tenemos:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a+2}}{\boldsymbol{b+2}} = \frac{\boldsymbol{a+4}}{\boldsymbol{b+4}} = \cdots = 1$$

En el ejemplo presentado tenemos:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{7}} = \cdots = 1$$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Situación 3

Para $\frac{a}{b}$, con $a > b$, tenemos:

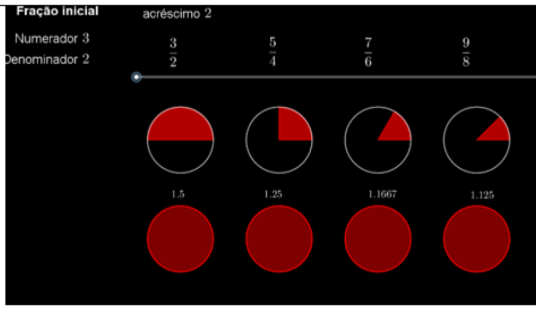
$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} > \frac{\boldsymbol{a+2}}{\boldsymbol{b+2}} > \frac{\boldsymbol{a+4}}{\boldsymbol{b+4}} > \cdots > 1$$

En el ejemplo presentado tenemos:

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} > \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}} > \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}} > \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} > \cdots > 1$$

Resulta que las fracciones se acercan a 1 pero nunca llegan a 1

</td><td>



</td></tr>
</table>

Fuente: http://ppgecim.ulbra.br

Agradecimientos

A la Coordinación para el Perfeccionamiento del Personal de Educación Superior (Capes), con la beca de productividad científica de nivel 1 para Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

Referencias Bibliográficas

Damasco, F. C.; Groenwald, C. L. O. y Llinares, S. C. (2020). A competência docente de Observar com Sentido situações de ensino e aprendizagem na Matemática. In: *Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática: referencias, práticas e perspectivas*. ULBRA.

Elkjaer, B. (2013). *Pragmatismo – Uma teoria da aprendizagem para o futuro. In: Teorias Contemporâneas da Aprendizagem*. (2013). São Paulo, Penso.

Groenwald, C. L. O. (2021). Educação Matemática em tempos de pandemia: uma experiência em um curso de Licenciatura em Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, v. 16, p. 229-247.

Illeris. K. (2007). *How We Learn: Learning and Non-learning in Schools and Beyond*. London/New York: Routledge.

Illeris. K. (2013). *Teorias Contemporâneas da Aprendizagem*. São Paulo, Penso.

Jarvis. P. (2013). Aprendendo a ser uma pessoa na sociedade – Aprendendo a ser eu. In: Illeris K. Teorias Contemporaâneas da Aprendizagem. Porto Alegre, Penso.

Llinares, S.; Buforn, P.; Groenwald, C. (2019). Mirar Profissionalmente las situaciones de enseñanza: una competencia basada enele conocimiento. In: *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Salamanca, Ediciones Universidad Salamanca.

NCTM. (2015). *De los principios a la acción – para garantizar el éxito matemático para todos.* México: Editando Libros S.A., 2015.

OECD. Organisation for Economic Co-Operation and Development. *The Definition and Selection of Key Competencies – DeSeCo*. 2005. Recuperado em: 12 ago. 2019 de https://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf

Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: Experience at the source of learning and development.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Penalva, M. C.; Llinares, S. (2011) Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In:GOÑI, Jesus María (coord) et al. *Didáctica de las Matemáticas. Colección: Formación del Profesorado. Educación Secundaria*. Barcelona: Editora GRAÓ. 12, 27-51.

Ponte. J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. Investigar em Educação, 2, 93-169. Recupeado el 15 de octubre de 2021 de https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4071.

Ponte. J. P. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. UNIÓN, no 21, 13-30.

Stein, M. K.; Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation: An International Journal on Theory and Practice*, v. 2(1), n. Routledge, p. 50–80.

Stein, M. K.; Grover, B. W.; Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. America Educational Research Journal, v. 33, n. 2, p. 455-488.

Smith, M. S; Stein, M. K. (1998) Selecting any Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle Scholl*, 3, 344-50.

DESAFÍOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN TIEMPOS HÍBRIDOS

Teresa LOIACONO
UBA, Argentina
teresaloiacono@yahoo.com.ar

Resumen

La historia de la educación y en especial la matemática está plagada de períodos críticos. Períodos en que se observaron que las premisas y estrategias probadas, aparentemente confiables habían perdido contacto con la realidad. Tratando de reflexionar sobre ellas, viajaremos en el tiempo desde la aparición del aula como la conocemos, el sistema educativo público, transitando la época y el porqué de su creación, pasando por la etapa de pandemia hasta la actualidad. Para entender las características de esas épocas, en que se encuentran interactuando educadores y educandos, nos acompañarán las ideas del sociólogo Zygmunt Bauman.

Palabras clave: Educación Matemática - Modernidad Líquida - Educación Híbrida.

Introducción

A través del tiempo, la educación en general y la educación matemática en particular, atravesaron por períodos críticos, en los cuales las premisas y estrategias probadas, supuestamente confiables perdieron contacto con la realidad y exigieron revisitar cuestiones tales como el aprendizaje, la forma de enseñar y las trayectorias. En 2020, la pandemia irrumpió en nuestras vidas y con ella una nueva crisis, mucho más compleja. Las aulas debieron cerrarse, mientras, docentes y alumnos se enfrentaban a nuevos desafíos: ¿cómo enseñar? …. ¿cómo aprender?
La forma de pensar la educación está íntimamente relacionada con las características de la época que la contiene y en el andar de su complejidad, elegimos ser acompañados por las ideas del sociólogo Zygmunt Bauman. Es así como, dentro de este particular marco conceptual, trataremos de exponer críticamente el devenir que transcurre desde los inicios y gestación del sistema educativo hasta la reciente fase contextual de pandemia. Reflexionaré sobre aquellas experiencias, las consecuencias de valor analítico que nos está dejando la misma, el papel que desempeñan las tecnologías y la importancia de la educación híbrida en educación.

La Educación en la Modernidad

El ***aula*** en la cual se genera el proceso enseñanza-aprendizaje, se organizó de la manera en que la conocemos hace unos trescientos cincuenta años, casi fines del siglo XVII.
Durante el siglo XIX, el estado comenzó hacerse cargo de la educación, son los comienzos del ***sistema educativo público.***
Ambos acontecimientos están íntimamente relacionados con las características y necesidades de la época en que se originaron, es decir, durante la ***Modernidad.*** Veamos entonces como describe el sociólogo, filósofo, y ensayista polaco, esta etapa de la historia de la humanidad y como estas marcaron el derrotero de la educación.

Modernidad

La *Edad Moderna*, es uno de los períodos elegidos por los historiadores occidentales para separar cronológicamente la historia de la humanidad, (prehistoria, edad antigua, edad moderna, edad contemporánea).
Se postula como comienzo de la misma, la toma de Constantinopla por los turcos en 1453. En cuanto a su final, la historiografía anglosajona asume que estamos aún en la Edad Moderna.
Al decir de *Bauman*: *"podemos asociar el principio de la edad moderna con diversos cambios en las facetas de la praxis humana, pero la emancipación del tiempo con respecto al espacio, su subordinación a la inventiva y a la capacidad técnica humanas, y su enfrentamiento con el espacio como herramienta de conquista y de apropiación"* es lo que le da identidad.

El sociólogo polaco piensa a la ***modernidad*** como una moneda que posee dos caras. Una denominada, ***"modernidad sólida"*** y la otra ***"modernidad líquida".*** ¿Por qué dos etapas? Porque considera que el atributo propio de la modernidad es la relación entre *espacio y tiempo* y la concepción de los mismos difiere en cada una de ellas.
El ***espacio en la modernidad sólida*** era el aspecto sólido, pesado e inerte, capaz de entablar solamente una guerra defensiva, de trincheras. Constituía un obstáculo para las flexibles embestidas del tiempo.
En cambio, en el ***espacio de la modernidad líquida*** germina la tecnología, que posibilita la conquista del espacio; una forma de puja entre el espacio y el tiempo. Tanto la velocidad de movimiento y el acceso a medios de movilidad más rápidos se expandieron al punto de significar el principal instrumento de poder y dominación

Modernidad Sólida

Un elemento sustancial de la ***modernidad sólida***, es la capacidad de transformar, paulatina y decisivamente, las estructuras económicas, sociales, políticas e ideológicas propias de la edad anterior, que terminan de afianzarse hacia finales del 1800 y comienzos del 1900.
Estos cambios se produjeron simultáneamente en varias áreas, generando a su vez un componente de realimentación y de sinergia: en lo **económico** con el desarrollo del *capitalismo*; en lo **político** con el surgimiento de estados nacionales y de los primeros imperios ultramarinos; en lo **bélico** con los cambios en la estrategia militar derivados del uso de la *pólvora*; en lo **artístico** con el *Renacimiento*, en lo **religioso**

con la *Reforma Protestante*; en lo **filosófico** con el *Humanismo,* ideas filosóficas que generaron un nuevo concepto del hombre y la sociedad.
El avance científico permitió el desarrollo de la ***investigación empírica*** que a la larga se interconectará con la tecnología típica de la ***Revolución industrial.***

****¿Qué ocurría en la ciencia física y matemática en la etapa sólida?***

Entre mediados de los siglos XVI y XVII, ***Cardano*** escribe su *Ars Magna*; ***Galileo Galilei*** aporta contribuciones originales a la astronomía y la matemática; ***Fermat*** y ***Pascal*** inician el cálculo de probabilidades; ***Newton*** enuncia las *Leyes de la Gravedad,* y junto a ***Leibnitz****,* inicia el *cálculo infinitesimal,* continuado por los ***Bernoulli****.*
Durante el siglo XVIII, *el* ***Siglo de Oro*** de la Matemática se destacaron entre otros: Euler, Agnesi, Lagrange, Laplace, Gauss.
Acompañando esa etapa de progreso, entre los últimos años del siglo XIX y hasta mediados del siglo XX, irrumpe la **matemática moderna.**
En esta época aparece el concepto de *conjunto***.** Evariste Galois construye la *teoría de grupos***.** Sophus Lie retoma estos temas y crea la teoría de los *grupos de transformaciones*. Lebesgue da el *concepto moderno de integral*. Hilbert *axiomatiza la geometría.* Se fundamenta la matemática, el grupo Bourbaki (Cartán, Dieudonné, Weyl, Chevalier y Eilemberg) publica *Elementos de Matemáticas*.

****¿Qué ocurría con la educación en la modernidad sólida?***

Debido a todos esos avances científicos y técnicos, la educación cumplió un rol importante. Las clases se dictaban en un aula, estructurada en base al método frontal, una disposición centrada en el frente, con un punto de atención en la figura adulta que organizaba la relación con el educando. Una relación asimétrica y radial entre el docente/adulto y los alumnos/niños-adolescentes-adultos.
En este período se destacan dos grandes pedagogos, el pensador checo ***Jan Amos Komensky*** (1592-1670) o *Comenio*, como se le conoce en habla hispana y el educador suizo ***Johan H. Pestalozzi*** (1746-1827).
Comenio propuso por vez primera una transformación educativa universal y sistematizada. Elaboró un manual ilustrado, para que los alumnos pudieran asociar las palabras con imágenes y objetos. Escribió un texto didáctico en el que recomendaba las dramatizaciones para que los niños recitaran y aprendieran activamente los sucesos importantes de la historia.
Pestalozzi fue un reformador de la pedagogía tradicional. Consideraba que el proceso de enseñanza-aprendizaje debía respetar el desarrollo del niño y utilizar el juego como una herramienta, pues estos permitían la exploración y la observación, de esa forma el niño aprender de una forma significativa.

Modernidad Líquida

Desde **mediados de 1900,** aproximadamente, **se va gestando una gran revolución**, no sólo en la ciencia matemática sino en la ciencia física. Estamos en el siglo del *fin de las certidumbres.* Lo aleatorio entra a formar parte de las fórmulas físicas. Einstein publica su *teoría de la relatividad*. Comienza a cuestionarse la forma en que se propaga la luz. Aparece la *constante de Plank*, el *principio de incertidumbre* de Heisenberg, el teorema de Bell. En 1933, el matemático soviético Andréi Kolmogórov propuso un sistema de axiomas para *la teoría de la probabilidad*. Cuestiones como el clima, las mareas ya no pueden explicarse de manera determinística. Aparece *la teoría del caos*, que se inmiscuye en un sin número de contextos cotidianos. La lógica abandona poco a poco la dicotomía del verdadero o falso para dar lugar a la lógica difusa, donde el valor de verdad de las proposiciones se da por los distintos grados de probabilidad de ocurrencia. John von Neumann y Oskar Morgenstern formalizan la *teoría de juegos.* En 1936, Alan Turing diseña la primera computadora. En 1946, en Estados Unidos, comienza a funcionar la primera computadora. En 1957 Rusia lanza al espacio el Sputnik 2, tripulado por la perrita Laika. El 20 de julio de 1969, la misión Apolo11 permite que Neil Armstrong y Edwing Aldrin pisen suelo lunar.
Se empieza a tomar conciencia de que "no existe una única forma de validar conocimiento matemático". Un claro ejemplo es el *Teorema de los cuatro colores*. Este se formuló en 1853 y recién lo demuestran en 1976 Kenneth Appel y Wolfgang Haken, de la Universidad de Illinois, con la ayuda de John Koch. Deducción cuestionada, porque la solución propuesta requería cientos de horas de cálculos mediante computador. No obstante, dicha solución ha resistido el escrutinio y la prueba del tiempo.
El párrafo anterior nos enfrenta nuevamente al problema de espacio-tiempo, pero ahora interviene la incertidumbre, la aleatoriedad, el caos… Estamos en una época de liquidez.
Para entender a esta **modernidad líquida**, seguiré a su autor que en el libro "Tiempos Líquidos", la describe así:

1°) Las **formas sociales** que limitan las elecciones individuales, que salvaguardan la continuidad de los hábitos, los modelos de comportamiento aceptable, tienen una existencia breve. No sirven para desarrollar una estrategia coherente y consistente con el tiempo suficiente para generar un **proyecto de vida individual.**

2°) Divorcio entre poder y política. *Gran parte del poder que tenía el Estado moderno para actuar con eficacia se está desplazando al políticamente incontrolable espacio global.* Las instituciones políticas existentes son incapaces de responder a los problemas cotidianos de los ciudadanos partícipes del Estado-Nación. *El estado abandona funciones que les eran propias, delegándolo en la iniciativa privada y/o en las decisiones individuales.*

3°) Fomento de la individualidad. Se premia las actitudes competitivas y degrada el trabajo en equipo**.** La sociedad se ve y se trata como una ***red.***

4°) *El* ***colapso del pensamiento, de la planificación y de la acción a largo plazo*** van en contra de conceptos, como ***desarrollo, maduración* y *carrera.*** "Olvidar por completo y con rapidez la información obsoleta y las costumbres añejas puede ser más importante para el éxito futuro que memorizar jugadas pasadas y construir estrategias basadas en un aprendizaje previo".

5°) Flexibilidad. La virtud que se proclama más útil para el crecimiento individual es la de ***flexibilidad,*** consistente con abandonar compromisos, lealtades e ir con rapidez tras la oportunidad momentánea.

En un planeta atravesado por "la información" nada de lo que ocurra puede permanecer en un afuera intelectual y material. En la modernidad sólida, el compromiso con la contraparte era en las relaciones capital-trabajo, dominaba lo mutuo y duradero. Este contexto les permitía a las personas *pensar mejor*, *planificar un futuro* invertir tiempo en él. Los equipos de trabajo y las rutinas diarias eran estables. Las habilidades profesionales resultaban útiles por mucho tiempo.

La Educación en Tiempos de Liquidez y Pandemia

Entrado el ***siglo XX*** los avances tecnológicos y científicos se fueron sucediendo con gran celeridad, facilitados por una rápida difusión de los mismos. Como consecuencia el sistema educativo, que a nivel medio solía pensarse como instancia para la admisión universitaria, ***entra en crisis.***
Uno de los ***cambios significativos***, se da en la ***enseñanza de la matemática***. En el año ***1958***, durante el Congreso Internacional de Matemática, se plantea la necesidad de una reforma en los métodos educativos empleados en Europa. En noviembre de ***1959,*** en Royaumont, se establecieron pautas para los contenidos de la reforma y lineamientos políticos para su puesta en práctica. Algunos de los conceptos a introducir por tal reforma, fueron, entre otros: la teoría de conjuntos, adopción del simbolismo moderno, estructuras algebraicas, sistemas axiomatizados. Había que adecuar la formación matemática al desarrollo científico y tecnológico y reducir la brecha entre la matemática preuniversitaria y universitaria. A nivel mundial, los encargados de formar docentes, definir los planes de enseñanza y los contenidos de la matemática básica, fueron los profesionales universitarios. Pero, cuando estos cambios comienzan a implementarse, no todos los docentes estaban preparados, no comprendían el fin ni el porqué de los mismos. Sobreviene una ***nueva crisis***. Los conceptos matemáticos, se imparten en forma totalmente abstracta, alejada de la realidad e incongruente con carreras no-matemáticas. Muchos docentes comienzan a investigar la forma en que imparten sus clases. Uno de ellos es ***Yves Chevalard***.
En **1991,** ***Chevalard,*** Licenciado en Matemática**, crea la noción de la transposición didáctica, del contrato didáctico,** conceptos que nacen dentro de la didáctica de la matemática y posteriormente pasan a formar parte de la didáctica general de toda ciencia. Desde esta perspectiva ya comienza a visualizarse un cambio de paradigma en el concepto de enseñanza. En la ***tríada didáctica: enseñante-alumno-saber enseñado***, será el docente quien deje de ocupar el lugar escénico de divulgador de conocimientos para reorientar la enseñanza en una reinvención de la matemática mediante la creación de situaciones didácticas.
El fin último de la enseñanza es ***la apropiación de la obra matemática por parte de los alumnos en los contextos característicos de una modernidad líquida*****:** *la producción colegiada, el incentivo de la creatividad no solo en el razonamiento sino también en la comunicación de ideas matemáticas, la flexibilidad de los tiempos de trabajo adecuados a una verdadera asimilación de contenidos, la planificación inacabada y siempre incompleta de una clase en virtud de los aportes, necesidades, contextos formativos, diversidad del grupo y ecología del aula.*
Esto no tendría sentido, si los futuros formadores no estuviesen alertas acerca de los cambios de paradigma.
Lentamente, en nuestro país se fueron dando cambios en el sistema educativo y hubo preavisos de situaciones de pandemia

Durante:

- **2005** en los profesorados de Educación Superior se comienza a implementar nuevos diseños curriculares, una de las características es acercar al futuro formador a la realidad en la cual se va a desempeñar, dotando a la educación del futuro docente de medios y herramientas desde el propio comienzo de la carrera mediante trabajos de campo. De tal manera que le permitan tomar conciencia real del adolescente actual, la sociedad en la que está inmerso, su problemática y los nuevos medios que tiene a su alcance: el avasallante mundo tecnológico. Quienes fuimos educados en la "solidez", estudiamos Psicología y Pedagogía desde la propia teoría, hoy en día el contexto social del adolescente y su entorno, se constituye en los cimientos para poder entender su psicología y para, en consecuencia, poder actuar pedagógicamente.

- **2006** se sanciona la Ley de Educación Nacional (LEN) N °26206

- **2008** acompañando esos cambios el Instituto nacional de Formación Docente, financia: "Nuevos materiales didácticos en la formación docente" [2].

- **2009** a finales de abril, el virus de la influenza A (H1N1) también llamado ***virus de la gripe porcina o de la gripe A***, arribó a nuestro país. La Organización Mundial de la Salud (OMS) y las autoridades sanitarias argentinas, expresaron que la inminente llegada del invierno podría causar una probable pandemia en el hemisferio sur. En la segunda quincena de junio, coincidiendo con el inicio del invierno, el virus se transmitió de manera sostenida en Buenos Aires y se expandió hacia otras zonas del país. El 29 de junio el gobierno decidió el cierre de los establecimientos educativos durante todo el mes de julio. Se extendía el receso escolar. Los institutos de formación docente adecuaron las fechas de exámenes y las autoridades educativas veían la posibilidad de recuperar dichas clases.

- **2010** por decreto 459/10 se pone en marcha el programa **Conectar Igualdad,** como una política de inclusión digital de alcance federal. Se distribuyeron netbooks en el período 2010-2012, a docentes y alumnos de educación secundaria de escuela pública, educación especial y de institutos de formación docente. La propuesta inicial era desarrollar contenidos digitales que se puedan utilizar en propuestas didácticas y trabajar en los procesos de formación docente con el propósito de transformar paradigmas, modelos y procesos de aprendizaje y enseñanza. El programa se discontinuó y no se terminó de formar a los docentes.

- **2014** los diseños curriculares de los profesorados de Educación Superior vuelven a adecuarse; en CABA se comienza a implementar la LEN, bajo el nombre de Nueva Educación Secundaria (NES).

- **2018** por el decreto 386/2018 se reemplaza el programa Conectar Igualdad por **Aprender Conectado.** Esta es una propuesta del Ministerio de Educación de la Nación, cuya misión principal es integrar la comunidad educativa en la cultura digital, promoviendo la innovación pedagógica y la calidad de los aprendizajes.

*****En este año, en las pruebas PISA, Argentina obtuvo en Matemática 379,5 puntos, posicionándose en el puesto 71 de 78 participantes.

*****En las pruebas Aprender, realizadas a estudiantes del último año del nivel secundario (5to o 6to) a nivel país, los rendimientos en Matemática muestran que un 42,8% de los participantes se encuentran por debajo del nivel Básico. Ya en el año 2002 una investigación presentada en las XVII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemáticas de Facultad de Ciencias Económicas y Afines, indicaban los escasos conocimientos que los educandos tenían para afrontar las primeras materias en la universidad y las dificultades para interpretar textos.

*Observados esos valores en CABA, en paralelo con la NES, se pone en marcha el proyecto la "Secundaria del Futuro" en algunas instituciones educativas. [6]

- **2020** en marzo se suspenden las clases en todos los niveles debido a la pandemia del CoViD-19.

Tiempos de Pandemia, Tiempo de Desafíos

Los docentes tuvieron que repensar en: cómo dictar sus clases, cómo preparar el material para sus alumnos, cómo evaluar, conocer nuevas herramientas, formatos y plataformas.
Los alumnos tuvieron que:
-asistir virtualmente a clases de distintos docentes con distintos enfoques de la virtualidad
-buscar, analizar y evaluar la información que recibían
-aprender a comunicar su producción, administrar bien los tiempos, tomar decisiones

-comprender que todo lo que surja de su paso por el aula virtual dependerá de sí mismo, de cuánto se involucre con su propio aprendizaje
Muchas de las instituciones no tenían plataforma y en general su implementación fue mala.
Las clases presenciales se trasladaron a la virtualidad. Se creó mucho material de apoyo destinado a los docentes y en muchos casos contradictorios con las características de la educación virtual.
Muchos profesores y maestros comienzan a dictar sus clases por YouTube
La familia se involucra en el aprendizaje, pero muchos padres no están preparados para responder preguntas y para asistir en todo el proceso de enseñanza.
Como nunca debemos ser conscientes de esta modernidad líquida y la relación ***espacio-tiempo***. Los tiempos de estudio y trabajo son en cualquier momento y en cualquier lugar.

- **2021 *¿qué nos va dejando la pandemia?***

En mayo el Consejo Federal de Educación, dispone que cada gobernación debe tomar los recaudos necesarios para la vuelta a las clases presenciales, garantizando el cuidado de docentes y alumnos. Se exceptuaran las zonas con categoría de "Alarma Epidemiológica y Sanitaria", que seguirá siendo virtual. En julio de ese año El Consejo Federal junto a los ministros de todas las provincias resuelve que para pasar de grado o año, los estudiantes deben aprobar el 70% de los contenidos considerados más importante en cada una de las áreas de estudio.

En la enseñanza conviven, la semi-presencialidad, con la educación virtual A nivel universitario, predominó lo virtual. Se está en el comienzo de los sistemas híbridos.

Entre mediados del 2020 y 2021, se comienzan a gestar:

***** Cursos de capacitación digital para alumnos y docentes, nuevos enfoques pedagógicos reflotando los conceptos de la educación virtual.
***** Comunidades en redes sociales y blogs educativos con la participación de profesores y padres tales como:
https://www.facebook.com/groups/ProfesDigitales
https://alejandria.com.ar/
https://www.padresorganizados.ar/
https://www.comunidad.madrid/servicios/educacion/educacion-cifras
***** Múltiples variedades de recursos tecnológicos, las plataformas ofrecen materiales, juegos, seminarios, asistencia al docente.
A los software y plataformas ya vigentes se van sumando otras, como: *Cloudlabs* una plataforma multilingüe que ofrece simuladores gamificados de laboratorios virtuales; *Blackboard* que ofrece servicios institucionales, clases a los docentes, pizarra interactiva, entre otros; Microsoft crea: *Office 365* para las universidades; Adobe crea su plataforma Adobe Educa y la lista continúa.

*** En forma remota se realizan numerosos Congresos, Jornadas, Simposios, Seminarios y Cursos.**

Pero no todo fue bueno

*****El informe de UNICEF del 14 de julio de 2021: "**Impacto de la pandemia en la educación de niños, niñas y adolescentes**" señala que, si bien los acuerdos federales alcanzados a comienzos de 2021 impulsaron fuertemente el regreso a las escuelas, los datos muestran que más de 1 millón de estudiantes no pudieron regresar a las aulas desde el inicio del ciclo lectivo 2021. Las causas fueron múltiples, pero una de las más importantes fue el equipamiento y los conocimientos informáticos.
*****Muchos alumnos *no alcanzaron* a cubrir los *contenidos mínimos.*
*****En el ámbito universitario también existieron problemas. Los alumnos que comenzaron la universidad en pandemia y no pudieron asistir a clases presenciales, en general, no se adaptaron a la cursada virtual. La edad de estos jóvenes oscila entre los 18 y los 20 años. Los profesores observaron que no tienen constancia, se dispersan con facilidad, les cuesta estudiar solos. En cambio los más grandes se fueron adaptando, si bien les costó adaptarse a las plataformas digitales, a las clases por zoom, a escribir y entregar su producción.
En esta etapa aparece la figura de ***coach de la educación***. Academias, instituciones comienzan a recurrir a ellos. El coach intenta una mirada integral del educando. Le ayuda a organizarse, a que le dedique tiempo al estudio, observa su desempeño en las materias, por ejemplo si el aprendizaje de las mismas tiene una causa externa. Etapa de liquidez.

- **2022**

Por decreto 11/2022: “Créase el “PROGRAMA CONECTAR IGUALDAD” en el ámbito del MINISTERIO DE EDUCACIÓN, con el objeto de proporcionar recursos tecnológicos en las escuelas públicas de gestión estatal y de elaborar propuestas educativas con el fin de favorecer la incorporación de las mismas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.”
En marzo de este año la actual presidenta de la Academia Nacional de Educación, Paola Delbosco corrobora lo que muchos docentes y formadores de educación superior venimos informando, “el bajo nivel de los que ingresan” a la universidad y profesorados.
En casi todas las instituciones educativas, de todos los niveles, se vuelve a la presencialidad, pero la modalidad combinada llegó para quedarse. Cabe entonces preguntarnos qué entendemos por ***“educación híbrida”***

Educación Híbrida

Para poder entender el concepto de híbrido utilizaré la definición que ofrece la ***Real Academia Española***:
“Dicho de una cosa: Que es producto de elementos de distinta naturaleza”.
Considerando a la ***RAE*** puede decirse que la educación híbrida, es una combinación de métodos de enseñanza. La educación es presencial con apoyo de materiales y recursos *online* preparados exclusivamente para esta modalidad.
Esta modalidad de aprendizaje semipresencial, mixto, combinado también denominado como *Blended Learning* o *B-learning* comienza a implementarse en la década de los 90, en Argentina y otros países. Por lo general en educación superior.
En la Universidad de Buenos Aires, desde aquella época, ya existía la semi-presencialidad. En la actualidad se dictan materias con esa modalidad, en UBA XXI y en Ciencias Económicas. En esta última podemos citar, entre otros, los cursos de Álgebra, Análisis Matemático I y Análisis Matemático II, para cada una de ellos se elaboraron materiales exclusivos con características de educación a distancia. Lo interesante es que el promedio de aprobados en las cursadas fue casi igual a los de las presenciales.

Las ventajas de esta modalidad

* Es un aprendizaje más enfocado. Dado que las tareas, los cuestionarios y los exámenes se pueden llevar adelante en línea, se puede pasar tiempo en el aula proporcionando debates en clase, asistiendo a los estudiantes a comprender realmente el material del curso.
*Permite un mejor uso de los tiempos tanto para los profesores como para los alumnos.
*Es un sistema de aprendizaje más inclusivo, permite llegar a una mayor cantidad de alumnos.

Las desventajas son todas las comentadas con referencia a la educación virtual.

Conclusión

La pandemia puso en evidencia el estado de la educación en el mundo, principalmente en Latinoamérica y en nuestro país en particular.
Los resultados de las pruebas Aprender y PISA, son un llamado de atención y de reflexión. A pesar de los cambios en los currículos, en las metodologías, en la inclusión de las tecnologías: ¿no habrá algo que no estamos viendo?
La pandemia dejó fuera del sistema a muchos niños, y otros que no alcanzaron los contenidos mínimos ¿cómo los recuperamos?
Posiblemente tendríamos que revalorizar las ideas de Comenio y Pestalozzi que pensaban en la dramatización y los juegos. Pensar esa metodología en todos los niveles y traerlas al presente de una pedagogía motivadora Sí jugar, hasta en la universidad. Acercarnos a las vivencias de los alumnos, teniendo en cuenta las características de estos tiempos líquidos.
En 1960 el educador Fernand Deligny escribía aconsejando a los docentes:

“Si quieres conocerlos rápido hazlos jugar.
Si quieres enseñarles a vivir, deja los libros a un lado.
Hazlos jugar.
Si quieres hacer tu tarea, hazlos jugar, jugar, jugar”

Referencias Bibliográficas

- BAUMAN, Z. (2005). Modernidad Líquida. Buenos Aires. Argentina. Fondo De Cultura Económica De Argentina, S. A.
- BAUMAN, Z. (2009). Los Retos de la Educación en la Modernidad Líquida. Barcelona. Gedisa S. A.
- BAUMAN; Z: (2009).Tiempos Líquidos. Argentina. Ensayos Tusquets
- BAUMAN, Z. (2013). La Cultura En El Mundo De La Modernidad Líquida. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Argentina. Fondo De Cultura Económica De Argentina, S. A.
-HOBSBAWM, E. (2011). Historia Siglo XX. Buenos Aires. Crítica.
-VINCENS VIVES, J. (1973).Historia General Moderna. Vol I. Desde el Renacimiento hasta principio del siglo XX. Barcelona. Montaner y Simón
- AROCENA, F.(1991). La modernidad y su desencanto. Montevideo. Vincens Vives Editor.
- SALAS, J. A.(2012). Historia general de la educación. Red Tercer Milenio S. C. México
- LE LIONNAIS y COLABORADORES (1976). Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático. Buenos Aires. EUDEBA
- PERERO, M. (1994). Historia e Historias de Matemática. México. Grupo Ed. Iberoamericana.
- LOIACONO, T. (1996) La Educación Matemática en las Carreras No Matemáticas. En Memorias de XI Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines. U. N. de Entre Ríos.
-BORGHI, C; LOIACONO, T. THELLER R y Colaboradores, (2002) ¿Los Niveles de Enseñanza Anteriores al Universitario son Responsables de la escasa Capacidad que desarrollan los alumnos en la resolución de problemas Matemáticos? XVII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemáticas de Facultad de Ciencias Económicas y Afines.
-CHEVALLARD,Y. (1998). La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Argentina. AIQUE Grupo Editor.
- BUSTOS, H., LARRIBAU, M y otros (2008) Nuevos materiales didácticos en la formación docente. Editorial I. S. P Dr. J. V. González ISBN: 978-987-1500-03-1
- BORGHI M.C. LOIACONO T. (2015) Uso de Tecnologías en Educación Superior. Antes y Ahora. En Memorias de XV Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria
-KATZ, M. (2019). Temas de Historia de la Física Tomo II Buenos Aires. Asociación Química Argentina
- DUSEL, I. (2011). Aprender y enseñar en la cultura digital. Fundación Santillana. Bs. As. Argentina
- LOIACONO, T. (2020). Pedagogía Líquida en Tiempos de Pandemia. Memorias del I SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual). UNLu:13-14/8/20. EDUNLU, 2021.
- LOIACONO, T. (2021). Creatividad e Imaginación en la Formación de Formadores en Memorias del IISEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual).UNLu:13-14/5/21.A publicar por EDUNLU.
- DELIGNY, F. (2017). Semilla de Crápula. Consejos para los educadores que quieran cultivarla. Editorial Cactus/tinta Limón Ediciones. Argentina.
- III La relatividad de Einstein
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen2/ciencia3/078/htm/sec_6.htm
- Principio de indeterminación de Heisenberg
http://enciclopedia.us.es/index.php/Principio_de_indeterminaci%C3%B3n_de_Heisenberg
- Manuel López Michelone
https://www.unocero.com/ciencia/kenneth-appel-y-la-prueba-del-teorema-de-los-cuatro-colores/
- https://pedagogia.mx/johann-heinrich-pestalozzi/
- https://www.institutoideas.com.ar/secundaria-del-futuro-un-analisis-sobre-la-ultima-reforma-educativa-en-caba/

DE LA CABEZA AL CORAZÓN:
Desafíos a la Educación Matemática en el Período Post-CoViD-19

Fredy Enrique GONZÁLEZ

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

fredygonzalezdem@gmail.com

Resumen

La epidemia de CoViD-19, causada por el SARS-CoV-2 (por sus siglas en inglés: *Severe Acute Respiratory Syndrome*), tuvo un significativo impacto global en, prácticamente todas las actividades humanas, siendo la educación en general, y la educación matemática, en particular, de las más afectadas. Durante las ondas más mortíferas de esta enfermedad, en la mayoría de los países latinoamericanos fue decretada una cuarentena educativa que dejó sin clases presenciales a millones de estudiantes; los profesores, por su parte, se vieron obligados a desarrollar prácticas de enseñanza virtuales (sincrónicas, asincrónicas o híbridas) sin estar suficientemente preparados. Las estrategias didácticas no siempre fueron eficaces ni efectivas, y han puesto en entredicho la calidad de la formación académica de los estudiantes. Ahora, las cifras de contagios y muertes por CoViD-19 están disminuyendo, y la pandemia "parece estar acercándose a su fase final", habiéndose producido un retorno a las clases presenciales. En ese contexto, surgen varios interrogantes: ¿Continuaremos enseñando Matemática en la misma forma que antes de la pandemia? Y en los momentos iniciales del retorno, ¿cuáles son los aspectos que debemos enfatizar? En esta conferencia, desde la noción de estrés postraumático, esbozaré algunas ideas sobre la prioridad que debe dársele a los aspectos emocionales, tanto de los estudiantes como de los profesores, reconociendo que «Las emociones están en el corazón de la enseñanza» ("*Emotions are at the heart of teaching*"), como lo dice Hargreaves (1998: 558).

Palabras clave: Educación Emocional - Dominio Afectivo - Matemática Emocional.

Introducción

Al momento de estar desarrollando esta exposición, es altamente probable que las clases en el formato presencial hayan sido retomadas, prácticamente en todas nuestras instituciones educativas, especialmente en los niveles pre-universitarios. El contexto de este retorno es el tránsito a la condición endémica de la enfermedad, causada por el surgimiento del virus SARS-CoV-2, CoViD-19, causante de millones de enfermos y poco menos de 5.000.000 de fallecimientos en el mundo entero y generador de una serie de traumas individuales, familiares y sociales, que han dejado una estela de situaciones anómalas en todos los países del mundo.

Los impactos del CoViD-19 a nivel macro-estructural son evidentes, principalmente los de naturaleza económica y los de carácter científico, derivados de las nuevas tecnologías aplicadas en el desarrollo de las vacunas con cuya aplicación se ha logrado controlar (relativamente) las mutantes cepas y las variantes recombinadas del virus. Sin embargo, otros impactos son menos ostensibles y, así, más difíciles de apreciar y superar. Se trata de las heridas emocionales sufridas por quienes han perdido algún ser querido que haya contraído la enfermedad. Luto, duelo, miedo, ansiedad, depresión, entre muchas otras dolencias del alma, se constituyeron en acompañantes silenciosos de millones de personas obligadas, circunstancial e involuntariamente, a permanecer dentro de sus hogares durante prolongados periodos de aislamiento y distanciamiento social. Allende, lo expuesto previamente, es necesario considerar tanto las secuelas físicas (corporales y psíquicas) dejadas por el CoViD-19 en quienes han sobrevivido al contagio, como las emocionales que están marcando la vida de sus familiares, especialmente, los menores de edad, aunque los mayores probablemente las sufren también.

Considerando lo antes expuesto, podría inferirse que muchos de los estudiantes, al reanudar sus clases en el formato presencial, estén padeciendo de “estrés postraumático” que como es sabido está asociado con vivir en carne propia, compartir con sus seres queridos, o tener conocimiento sobre situaciones asociadas con: **amenazas a la vida** (recordemos el gran número de fallecimientos por CoViD-19); **lesiones graves** (prestemos atención a las secuelas corporales que padecen los sobrevivientes al CoViD-19 debidas a los efectos mismos de la enfermedad y, en algunos casos, también como consecuencia de los tratamientos médicos y clínicos aplicados durante su contagio); **agresiones corporales** (es necesario advertir que durante la cuarentena, conforme a cifras reportadas por la ONU, se incrementó dramáticamente el número de situaciones de violencia intrafamiliar, padecidas especialmente por mujeres y particularmente, niñas).

Así que, esta reanudación de las clases presenciales, en modo alguno puede considerarse una vuelta a la “normalidad pre-pandémica”. Al contrario, es una situación inusitada que amerita actuaciones innovadoras y genera retos insospechados a todos los actores del hecho educativo; particularmente, a los maestros y maestras que están en contacto directo con los estudiantes y, más específicamente a quienes han de enseñar Matemática a los escolares. Esta exposición está centrada en los desafíos a la Educación Matemática durante la fase inicial del Período Post-CoViD-19.

Emociones y Aprendizaje

Como parte del Dominio Afectivo del comportamiento humano (Martínez Padrón, 2005), las apreciaciones, preferencias, emociones, creencias, actitudes, valores y sentimientos, tienen repercusiones importantes sobre el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación en la Matemática Escolar, es decir, la Matemática constituida por las transposiciones didácticas (Chevallard, 1991) de las Matemáticas Académicas para convertirlas en Matemáticas para Enseñar (Valente, 2005). En dicho dominio, los factores considerados como más relevantes son las Actitudes, las Creencias y las Emociones; en relación con el rol de estas últimas han sido encontradas evidencias sobre la influencia de los factores emocionales en la construcción del conocimiento matemático en situaciones escolares; en este ámbito destaca Inés María Gómez Chacón con su trabajo sobre Matemática Emocional (Gómez Chacón, 2000), configurando un marco teórico de la dimensión emocional en educación matemática, destacando la integración entre cognición y afecto, y el impacto que tiene el estado emocional del estudiante sobre la realización de sus actividades matemáticas escolares.

Estrés Postraumático y Aprendizaje

Como fue expuesto previamente, para muchos estudiantes el retorno a la presencialidad en las clases acontece en una condición de estrés postraumático (EPT), cuyos efectos neurobiológicos y neuropsicológicos han sido documentados, entre otros, por Seijas Gómez (2013); destacándose alteraciones en la memoria, dificultades en el aprendizaje asociativo, dificultades para organizar la información. Además, se encontraron evidencias según las cuales, el recuerdo de la situación generadora del EPT puede generar angustia y ansiedad que reducen la eficiencia en el aprendizaje porque, como lo afirma Jadue (2001), “disminuyen la atención, la concentración y la retención, con el consecuente deterioro en el rendimiento escolar. Los muy ansiosos tienen dificultades para poner atención, se distraen con facilidad.” (§ 12). Agrega esta autora que:

> Un estado ansioso intenso provoca que el alumno se altere fácilmente por experiencias de la vida cotidiana y especialmente ante la tarea escolar, ya que muestra un comportamiento y un rendimiento escolar distintos al resto de sus compañeros. Exhibe desasosiego y un miedo exagerado y constante a actuar de una manera vergonzante o sorprendente en situaciones o actividades donde se reúnen varias personas. Jadue (2001, § 16)

Inferimos entonces que enseñar matemática escolar luego de la pandemia CoViD-19 genera cruciales desafíos a los docentes que deben ser atendidos con la prioridad que ameritan.

Desafíos a la Educación Matemática en el Período Post-CoViD-19

> ¿Qué será de la Educación Matemática después del coronavirus? Haverá um retorno ao que uma vez já foi? Em especial, o que a Educação Matemática passará a produzir? O que isso produz em Educação Matemática? Quais são os desafios impostos à Educação Matemática? Quais serão as preocupações dessa área a partir de agora? (Miarka, Maltempi, 2020) (subrayado añadido)

A ese conjunto de interrogantes referidos por Roger Miarka y Marcus Maltempi (2020), se está comenzando a dar respuestas. Así, en el *survey* internacional realizado por Bakker, Cai y Zenger (2021), durante los años 2019 y 2020, antes y durante la pandemia de CoViD-19, plantearon a profesores que enseñan Matemática y a investigadores en Educación Matemática, los interrogantes siguientes: *Q2019: ¿Cuáles son los temas en los cuales la investigación en Educación Matemática debería hacer énfasis durante la próxima década? Q2020: ¿La pandemia ha cambiado su visón sobre los temas en los cuales la investigación en Educación Matemática debería hacer énfasis durante la próxima década? Si es así, indique cómo*. Mediante un análisis de las respuestas obtenidas, los autores presentaron los Futuros temas de Investigación en Educación Matemática. En la Tabla 1, se muestran, en orden descendente, conforme al porcentaje de respuestas asignadas, los temas identificados en las respuestas al interrogante formulado en 2019 (Q2019).

Tabla 1. Porcentajes de respuestas mencionadas sobre cada tema (Q2019)

	Temas	
1	Enfoques de la enseñanza	64
2	Metas de la Educación Matemática	54
3	Relación de la educación matemática con otras prácticas	36
4	Desarrollo profesional de los profesores	23
5	Tecnología	22
6	Equidad, Diversidad e Inclusión	20
7	Afectos	17
8	Evaluación	9

Fuente: Bakker, Cai y Zenger (2021, p. 3)

Sorprende la relativamente baja importancia atribuida al dominio afectivo (7ª posición sobre 8 temas en total); estos temas, conforme a los autores del *survey*, fueron reforzados en las respuestas obtenidas para el interrogante Q2020.

En el tema “Afectos” son incluidos fenómenos psicosociales tales como emoción, amor, creencias, actitudes, interés, curiosidad, diversión, compromiso, alegría, participación, motivación, autoestima, identidad, ansiedad, alienación y sensación de seguridad, muchos de los cuales, un buen número de los participantes en el survey afirmaron que debían ser estudiados en conjunto con la cognición, indicando además que las cuestiones afectivas del comportamiento humano, de la misma forma que el aprendizaje, no responden a un asunto meramente individual sino, predominantemente, social (Bakker, Cai y Zenger, 2021, p. 10).

Otra de las respuestas dadas a los interrogantes de Maltempi y Miarka fue dada por Vicenç Font y Gemma Sala (2021) quienes sugieren tendencias en cuanto a los temas de investigación en Educación Matemática; ellos visualizan "un aumento de la investigación sobre las acciones que tomaron los profesores en general (y los de matemáticas en particular) en este período de pandemia." (p. i); también reconocen que las medidas adoptadas para contrarrestar el impacto del CoViD-19 (por ejemplo, el distanciamiento social y la suspensión de las clases presenciales), tuvieron "un profundo impacto sobre el aprendizaje y la enseñanza", sobre todo en los estudiantes provenientes de los sectores económicamente menos favorecidos, y cuyos alcances aún no conocemos.
Uno de los asuntos que debe ser examinado corresponde a ver cómo afecta el uso de entornos virtuales al aprendizaje de las matemáticas sobre los estudiantes; se presume que uno de los aspectos de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos sobre los que incide la mediación tecnológica es la *idoneidad afectiva*, entendida como "grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio" (Giacomone, Godino, & Beltrán-Pellicer, 2018, p. 4), cuyos indicadores son, respectivamente: situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional (intereses); implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. (actitudes); autoestima, evitación al rechazo, fobia o miedo a las matemáticas (emociones) (ver: Galindo y Herrera, 2015; p. 630).
No obstante, la importancia de los aspectos afectivos (particularmente los emocionales) sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, los mismos no aparecen como prioritarios en las agendas de investigación en educación matemática en América Latina motivadas por la Pandemia de coronavirus, como la propuesta por Castro, Pino-Fan, Lugo-Armenta, Toro & Retamal (2020).
Lo anterior resulta contradictorio considerando el reconocimiento del impacto emocional, sobre docentes y estudiantes, que tuvo la pandemia; ello amerita la realización de evaluaciones psico-emocionales que permitan auscultar el impacto que las medidas sanitarias (por ejemplo, el confinamiento) hayan podido producir en los estudiantes. En este sentido, se dispone de algunos estudios que identificaron los ámbitos donde la pandemia ha afectado a las familias, como el de García Arias (2021); para este autor los ámbitos en los que la pandemia afectó a las familias y, por tanto, incidieron sobre el estado psico-emocional de los estudiantes (en el contexto de España), que también pueden ser analizados en nuestros países (ver Cuadro 1) son:

Cuadro 1. Principales ámbitos en que pudo afectar la pandemia a las familias

Sanitario	El primer impacto de la pandemia es obviamente el sanitario. Muchas familias se vieron afectadas por la CoViD-19, en algunos casos de manera asintomática y, en otros, con secuelas graves e incluso fallecimientos.
Laboral	Otro de los impactos más destacados de la pandemia fue el ámbito laboral. La pérdida de empleo es un elemento determinante en la estabilidad psicológica y emocional de las personas. Durante 2020, de acuerdo con los datos de la Encuesta de Población Activa (EPA), se produjo en España una destrucción de 622.600 puestos de trabajo y un incremento del paro de 527.900 personas.
Económico	Como consecuencia del factor anterior, el impacto económico adquirió una gran relevancia en las familias.
Educativo	El escenario de una educación telemática al final del trimestre del curso 2019-2020 tuvo un impacto negativo en gran parte del alumnado debido, entre otros factores, a: — La educación en las etapas de infantil, primaria y secundaria requiere de la presencialidad para poder desarrollar gran parte de los contenidos y aprendizajes. — Algunas familias tuvieron dificultades con los recursos tecnológicos, bien por ausencia de ellos o por tener un número insuficiente para toda la familia en estado de teletrabajo y teleducación. — En algunos casos, se produjo un «absentismo virtual» voluntario por parte de algunas familias.
Social	El ser humano es un ser eminentemente social. El contacto social es fundamental para el equilibrio y para el desarrollo psicológico, emocional y educativo del individuo. Debido a la cuarentena y a las normas sobre reuniones de grupos de convivientes, se produjo una merma en las relaciones sociales de las familias, con las consiguientes consecuencias emocionales y/o psicológicas.
Emocional	Los factores sanitarios, laborales, económicos, educativos y sociales influyen en el estado emocional del individuo.
Psicológico	El impacto psicológico producido por la pandemia y el confinamiento ha sido recogido en diferentes estudios. De hecho, la propia ONU advertía de un posible incremento de suicidios por el coronavirus, siendo los trabajadores sanitarios, las personas mayores y los jóvenes la población más vulnerable. (https://news.un.org/es/story/2020/09/1480312)*

Fuente: García Arias (2021, p. 95).

Como se advierte, los siete ámbitos sugeridos por García Arias convergen en el dominio afectivo, en cuanto a lo emocional. Por ello, afirma que los estudiantes deben ser capacitados para poder "enfrentarse a situaciones

complejas con posibilidades de éxito, aspecto que entraña mucha mayor complejidad que la simple emisión de frases positivas" (p. 97).
Por su parte, Castejón (2020), señala que los principales efectos psicológicos que la pandemia ha traído consigo afectando a los estudiantes:

> Problemas de sueño por la falta de rutinas y preocupaciones. • Problemas sociales derivados del miedo a relacionarse con determinados colectivos. • Problemas de duelo por la imposibilidad para despedirse de los seres queridos. • Problemas de ansiedad por la preocupación por el futuro o miedos a rebrotes. • Frustración e incertidumbre por no poder realizar las actividades programadas durante el confinamiento y por la preocupación económica. • Tristeza, depresión y preocupación por estar separados de los familiares y de la gente querida. (Castejón, 2020, citado por Fernández Fernández, et. al. 2020, p. 55)

Con basamento en las evidencias brindadas por las investigaciones antes citadas, puede inferirse que en el período Post-CoViD19, los aspectos emocionales en la enseñanza cobrarán relevante importancia; por ello, debe dárseles un tratamiento adecuado de modo de minimizar el impacto psicológico, inhibidor del aprendizaje, que el largo período de confinamiento y aislamiento social, haya tenido sobre los estudiantes, especialmente los de menor edad y aquellos provenientes de sectores económicamente menos favorecidos. Es probable que haya que dar prioridad a los aspectos afectivos más que a los cognitivos, al menos durante la fase inicial del retorno a las clases presenciales.
Seguidamente se considera un plan de acción al respecto, a saber:

1. Atender a la necesidad de generar y fomentar el interés por las matemáticas.
2. Propiciar un clima escolar que reduzca las situaciones que generen ansiedad y la alienación.
3. Involucrar a los estudiantes en actividades propiamente matemáticas.
4. Estimular la confianza en la realización de actividades colectivas que ameriten proximidad física luego de un período tan prolongado de estar socialmente distanciados de sus compañeros y profesores, sobre todo cuando la enseñanza se ha realizado únicamente mediante la tecnología audiovisual.
5. Rescatar el sentido de pertenencia de los estudiantes al aula de matemáticas.

A modo de cierre

En el retorno a las clases presenciales de Matemática es imprescindible prestar atención a la dinámica emocional de los estudiantes quienes, puede decirse, han sobrevivido a una catástrofe y podrían estar sufriendo un Trastorno Postraumático.
Los docentes en general, y quienes enseñan Matemática, en particular, deben estar muy atentos al comportamiento de sus estudiantes y tomar las debidas precauciones con el propósito de garantizar su pronta recuperación y encauzarlos adecuadamente por los derroteros de un aprendizaje matemático de calidad.

Referencias Bibliográficas

Bakker, A.; Cai, J.; Zenger, L. Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, Switzerland, v. 107, n. 1, p. 1-24, 2021.

Castejón, J. (2020). *Efectos psicológicos del confinamiento y cómo afrontarlos*. (2020, julio 8). Hospital Clínica Benidorm. https://www.clinicabenidorm.com/afrontar-los-efectos-psicologicos-del-confinamiento-covid19/

Castro, W. F., Pino-Fan, L. R., Lugo-Armenta, J. G., Toro, J. A., & Retamal, S. (2020). A Mathematics Education Research Agenda in Latin America Motivated by Coronavirus Pandemic. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(12), em1919. https://doi.org/10.29333/ejmste/9277

Chamie, L. M. S. (1990). *A Relação Aluno–Matemática: alguns dos seus significados*. 1990. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Rio Claro, SP. 1990.

Chevallard, Yves. *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*. France: la Pensée Sauvage, 1991.

Fernández Fernández, C. R., Martínez Domingo, J. A., Berral Ortíz, B., Cena Cuadra, C. (2020). Riesgos de los Discentes Durante un Periodo de Confinamiento Provocado por la Pandemia de COVID-19. En: Aznar Díaz, I., Cáceres Reche, M. P., Marín Marín, J. A., Moreno Guerrero, A. J. *Desafíos de investigación educativa durante la pandemia COVID19*. Pp 49-60. Madrid: Editorial DYKINSON, S.L. (2020). Disponible en: https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/6697/1/9788413771724%20%281%29.pdf

Galindo, M., Herrera, C. Idoneidad Afectiva de un Proceso de Enseñanza de las Ecuaciones Utilizando Videos. Educativos. En Parraguez, M., Rivas, H., Vásquez, C., Pincheira, N., Solar, H., Rojas, F. y Chandía, E. (Eds.), *Memorias de las XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 628-632). Lugar: Villarrica-Chile. Disponible en: https://www.sochiem.cl/documentos/xix-jnem-libro-actas.pdf

García Arias, T. (2021). El impacto emocional de la pandemia en docentes y alumnado. *Participación Educativa*, Vol. 8, Nº 11/Mayo, pp 89 – 103. Disponible en: https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:0f27cc39-805f-4f2d-bced-3901839c0e7f/pe-n11-art06-toni-garcia.pdf

Giacomone, Belén, Godino, Juan D., & Beltrán-Pellicer, Pablo. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, e172011. Epub 27 de marzo de 2018. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

Gómez Chacón, Inés María. (2000). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid, Narcea, 276 p.

Hargreaves, A. (1998). The emotions of teaching and educational change. En A. Hargreaves, A. Lieberman, M. Fullan y D. Hopkins (Eds.). *International handbook of educational change*. Dordrecht/Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, pp. 558-575.

Jadue J, Gladys. (2001). Algunos Efectos de la Ansiedad en el Rendimiento Escolar. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, (27), 111-118. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052001000100008

Martínez Padrón, Oswaldo Jesús. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradígma*, *26*(2), 7-34. Recuperado en 09 de abril de 2022, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512005000200002&lng=es&tlng=es.

Miarka, R.; Maltempi, M. O que será da Educação Matemática depois do Coronavírus? Bolema, Rio Claro, v. 34, n. 67, ago. 2020, p. ii-iv. Available at: <http://hdl.handle.net/11449/208019>.

Sala, Gemma, & Font, Vicenç (2020). 2021. Un año de incertidumbres para la Educación Matemática. BOLEMA (Boletim de Educação Matemática), 34(68), i-v.[fecha de Consulta 10 de Abril de 2022]. ISSN: 0103-636X. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291265342001

Seijas Gómez, Raquel. (2013). Trastorno por estrés postraumático y cerebro. *Revista de la Asociación Española de Neuropsiquiatría*, *33*(119), 511-523. https://dx.doi.org/10.4321/S0211-57352013000300004

Valente, W. R. (2005). A matemática escolar: epistemologia e história. Revista Educação em Questão, v. 23, n. 9, p. 16-30, 15 ago. 2005.

LAS PROBLEMÁTICAS SEMIÓTICAS Y LA SEMIÓTICA EN LA CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LOS CONJUNTOS INFINITOS

Héctor Mauricio BECERRA GALINDO
Colegio Tomás Cipriano de Mosquera I.E.D., Colombia
Grupo de Investigación NRD, Italia y MESCUD, Colombia
hbecerra@educacionbogota.edu.co

Resumen

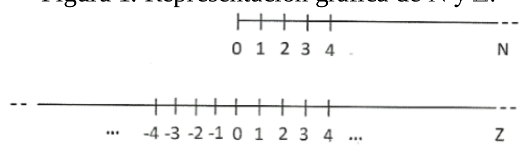
En esta comunicación se presentan algunos resultados de la investigación doctoral sobre las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos, que surge de las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos. Estas dificultades están asociadas a la dificultad objetiva de los estudiantes frente a la temática del infinito, a la temática general de la formación de una noética frente a las representaciones semióticas (paradoja de Duval) y al desarrollo de una "conciencia semiótica" por parte de los docentes. En esta investigación, se centró la atención especialmente en la dificultad asociada a la falta de "conciencia semiótica" por parte de los docentes en las representaciones elegidas en la enseñanza-aprendizaje de los conjuntos infinitos y sus consecuencias negativas en el aprendizaje de los estudiantes de este objeto matemático. Como resultado de la investigación, se presentan algunas manifestaciones de los docentes que describen las problemáticas semióticas presentadas en las representaciones de los conjuntos infinitos en las prácticas docentes y que permitió iniciar una toma de conciencia semiótica por parte de los mismos docentes.

Palabras clave: Representación Semiótica - Conciencia Semiótica - Conjuntos Infinitos - Didáctica de la Matemática.

Problema

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos se evidencia dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva; estas dificultades entre muchas otras están asociadas especialmente a: 1) la dificultad objetiva de los estudiantes frente a le temática del infinito (que constituye un obstáculo epistemológico)[1] y a la temática general de la formación de una noética frente a representaciones semióticas como es propuesto por Duval (1993), 2) la concepción errada de algunos docentes de matemáticas con respecto al infinito y específicamente a los conjuntos infinitos, y 3) la falta de conciencia semiótica en las representaciones elegidas por los profesores en la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos; con "conciencia semiótica" queremos indicar el conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática.

Figura 1. Representación gráfica de ℕ y ℤ.



Fuente: Arrigo, D'Amore, & Sbaragli (2011, p. 222).

Las dificultades asociadas a la construcción cognitiva de los estudiantes y la concepción errada de algunos profesores de matemáticas, ya fueron temas de muchas investigaciones en el pasado y son antecedentes de la investigación, por lo cual nuestra atención se centró en la falta de "conciencia semiótica" en las representaciones elegidas por los docentes en la enseñanza-aprendizaje de los conjuntos infinitos y a las interpretaciones que hacen los estudiantes de estas representaciones, como base de una reflexión crítica por parte de los docentes. Esta dificultad se empieza a evidenciar cuando los docentes generan argumentos desde lo que ve en las representaciones y no desde la coordinación de registros de representaciones semióticas que son necesarias para la conceptualización (Duval, 1993), de los conjuntos infinitos; por ejemplo, el docente (codificado con la letra C) al ver la representación gráfica (Figura 1) que es habitual en los libros de texto y en las prácticas docentes, lo lleva a dar las siguientes respuestas:

> *Inv: […] ¿Tú crees que los elementos que forman el conjunto de los enteros son: más, menos o el mismo número de los elementos que tiene el conjunto de los naturales?*
> *C: Obviamente son más, están además todos los negativos.*
> *Inv: ¿Cómo representarías estos conjuntos numéricos a tus estudiantes?*
> *C: Los relativos [enteros] los pondría en la recta de los números y los naturales en cambio deben estar en la línea de los números. […]*
> *Inv: ¿Esto lo presentas en clase?*
> *C: Por supuesto que digo que los números negativos siempre deben estar siempre antes de los positivos.* (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209)

En este caso la representación gráfica lleva a pensar, tanto a los docentes como a los estudiantes, que el número de enteros es el doble de los números naturales, en otras palabras, que el conjunto de los enteros tiene más elementos que el conjunto de los naturales; además establece que "[…] todos los números [naturales] 0, 1, 2, 3, … son el doble de los pares, porque faltan los impares" (Arrigo et al., 2011, p. 209), lo que genera el fenómeno de la dependencia, propuesto por Arrigo y D'Amore (1999) al concebir como verdad absoluta el concepto euclidiano "El todo es mayor que la parte"; en este caso vemos nuevamente una problemática con la representación y conceptualización de los conjuntos infinitos, ya que a una mayor longitud debe corresponder una mayor cardinalidad del conjunto de puntos (Fischbein, 1992, 2001).

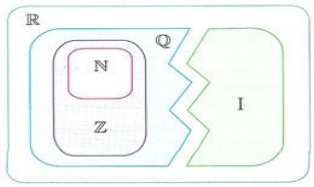
En los anteriores argumentos se muestra en cierta medida la falta de "conciencia semiótica" que tienen los docentes en la construcción cognitiva y en la enseñanza de los conjuntos infinitos; pero esta no es la única causa; los docentes, para los procesos de enseñanza - aprendizaje de los objetos matemáticos, recurren a los libros de matemáticas como referentes para su planeación y diseño de actividades.

El problema se empieza a evidenciar también cuando los docentes para la construcción cognitiva de los números reales proponen en su catedra la siguiente definición del libro de texto de secundaria (grado octavo (8^0)):

> *Los números naturales ℕ, los enteros ℤ y los racionales ℚ, conforman, junto con los irracionales 𝕀., el conjunto de los números reales ℝ.*

[1] El obstáculo epistemológico se propone desde la definición dada por Brousseau (1983), quien establece que *"es un conocimiento estable que funciona bien en ámbitos anteriores, pero que crea problemas y errores cuando se le intenta adaptar a nuevas situaciones"*. (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 135)

Para entender cómo se relacionan los conjuntos de números mencionados, observemos el siguiente esquema:



(Dueñas, Garavito, & Lara, 2007, p. 48)

En esta definición, se puede observar un problema en la representación semiótica (Becerra Galindo, 2017, 2018, 2019, 2020) que generan una contradicción entre el registro de la lengua natural y la representación auxiliar; la cual no está representando correctamente el objeto matemático números reales, en este caso no existe una coordinación de registros semióticos (Duval, 2017).

En la construcción cognitiva de los números reales se proponen en los libros de textos de secundaria (grados: octavo y once) las siguientes definiciones:

A partir de esta problemática que se presenta sobre las representaciones, se plantea la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué manifestaciones de la conciencia semiótica se producen en el docente al problematizarle su elección de representaciones semióticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de los conjuntos infinitos?*

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación, se caracterizaron las manifestaciones de "conciencia semiótica" que se producen en el docente, al problematizarle su elección de representaciones semióticas utilizadas en el aprendizaje de los conjuntos infinitos a sus estudiantes, lo que se expondrá en el análisis de este artículo.

Marco Teórico

Las referencias que se abordan para este trabajo se relacionan especialmente con los elementos semióticos-noéticos propuestos en la teoría de Duval (1995/1999, 2004, 2006, 2016), ya que los objetos de la matemática no son cosas que son percibidas por los sentidos: nadie los puede ver, tocar, saborear, oír, sentir, pesar, colorear, romper, lo único que podemos hacer con estos "objetos matemáticos es describirlos, definirlos, denotarlos, denominarlos, diseñarlos etc., es decir dar representaciones semióticas". (D´Amore, Fandiño, & Iori, 2013, p. 125)

En palabras de Duval (1995/1999, 2004, 2016) una representación es "algo que se pone en lugar de otro algo" (Duval, 2016, p. 62) y la estructura que propone Duval (2008) de una representación semiótica es:

{{contenido de la representación, registro semiótico representado}, objeto representado}

Los registros que se movilizan en matemáticas son cuatro: discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales. En la figura 2, se presenta la clasificación de los registros que son movilizados en matemáticas.

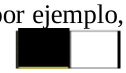
Figura 2. Clasificación de los diferentes tipos de registros movilizados en matemáticas.

	REPRESENTACIONES resultantes de uno de los tres tipos de **OPERACIONES DISCURSIVAS**: 1 ***Denotación de objetos*** (nombres, marcas…) 2 *Enunciado de relaciones o propiedades* 3 *Inferencia* (*deducción, cálculo*…)	**REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA** (Configuraciones de forma **1D/2D, 2D/2D, 3D/2D**)
REGISTROS MULTIFUNCIONALES: **Los procesos NO SE PUEDEN poner en algoritmos**	EN LENGUAJE NATURAL: dos modalidades no equivalentes para expresar • *Explicaciones* **ORALES**, ¿ • **ESCRITOS** (**visuales**): *teorema, demostraciones* …	**ICÓNICO**: dibujo, esbozo, patrón **……………………………** **NO ICÓNICO**: figuras geométricas que se pueden construir con herramientas
	Representaciones AUXILIARES transicionales *Sin reglas de combinación* (*apoyo libre*)	
REGISTROS MONOFUNCIONALES: **La mayoría de procesos son algorítmicos**	EN SISTEMAS SIMBÓLICOS **Sólo escritos*: imposible de contar oralmente sino es deletreando*** *Cálculo, demostración*	D2 COMBINACIÓN DE FORMAS D1 y D0, orientadas o no (flechas) *Diagramas, gráficas*

Fuente. Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016, p. 71).

Es necesario aclarar que existen unas representaciones auxiliares que no dependen del registro semiótico y son utilizadas en matemáticas, como el material (por ejemplo, el manipulativo como: el ábaco, las regletas de Cuisenaire, bloques lógicos, etc.), los ejemplos, las ilustraciones, la organización (las tablas), etc. (Duval, 2004).
Los dos tipos de transformaciones que se dan en la representación semiótica son:

- Los tratamientos, que son transformaciones en el mismo registro; por ejemplo: ½ = 0.5, se pasa de un registro de escritura fraccionaria a un registro de escritura decimal, pero se sigue conservando en el registro monofuncional y registro discursivo.
- Las conversiones son transformaciones de representaciones que consiste en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar del registro de la lengua natural al registro pictográfico, así:

  Un medio $\longrightarrow$ 

Esta última transformación es la raíz de "los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático [… por su…] complejidad cognitiva […y por el…] cambio de representación" (Duval, 2016, p. 85).

Metodología

Esta investigación se enmarcó en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptiva - comparativa, entendiendo el sentido de la primera como la que "Describe características de un conjunto de sujetos o áreas de interés" (Tamayo, 2001, p. 66) y de la segunda como: "La actividad de la razón que ponen en correspondencia unas realidades con otras para ver sus semejanzas y diferencias" (Sierra-Bravo, 1994, p. 161).
Para establecer las manifestaciones de conciencia semiótica de los docentes, se tuvo en cuenta la siguiente opción metodológica:

1) Se observaron y se grabaron las clases de los docentes, evidenciado la elección de las representaciones semióticas de los conjuntos numéricos utilizadas por el docente para la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos;
2) se tomaron las frases, fragmentos de video y las hojas respuesta de sus estudiantes (entrevista de los estudiantes), que muestran la no construcción del objeto matemático conjunto infinito a partir de la elección de representaciones semióticas de los conjuntos numéricos propuestas por el docente y
3) se formularon preguntas al docente relacionadas con la elección de representaciones semióticas para alcanzar la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos por parte de sus estudiantes; se le mostraron las respuestas de sus estudiantes, las cuales evidenciaron la no construcción cognitiva del objeto matemático conjunto infinito (fragmentos de video, frases y hojas de respuestas de sus estudiantes). En la respuesta (datos) dada por el docente se justifican las manifestaciones de su conciencia semiótica sobre la elección de las representaciones semiótica de los conjuntos numéricos utilizados para favorecer la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos.

La investigación se realizó en dos colegios públicos en Bogotá-Colombia, esta selección se realizó de manera intencional y con unos criterios a priori. En estos colegios se eligieron 6 profesores de matemáticas, pero todo el proceso de investigación se hizo con 2 docentes; esta selección se realizará a partir del conflicto que los docentes observaron y declararon respecto a la dificultad que presentan los estudiantes respecto a la conceptualización de objetos matemáticos a través de las representaciones semióticas.

También se seleccionarán en cada colegio estudiantes a cargo del grupo de docentes seleccionados, que cursaban en grado Noveno (9^0) y Once (11^0), para conformar una muestra total de 67 estudiantes (con edades entre 14 a 18 años aproximadamente); la selección de estos estudiantes se realizó de forma aleatoria.

Análisis

En este análisis se compararon las representaciones semióticas (representación auxiliar de conjunto) que los docentes D_{11}[2] y D_{21}[3] identificaron, eligieron y explicaron a sus estudiantes en su cátedra y en la entrevista, para la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos, con las representaciones semióticas realizadas en la entrevista de sus estudiantes y los referentes teóricos. En el análisis de esta comparación, se caracterizan las manifestaciones de conciencia semiótica de los docentes sobre las representaciones de los conjuntos numéricos para la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos.

A continuación, se presenta un ejemplo de la manifestación de conciencia semiótica de los docentes D_{11} y D_{21} en la representación auxiliar de conjunto.

Inicialmente, el investigador muestra al docente D_{11} un segmento de video de la entrevista hecha a sus estudiantes sobre el tipo de representación que ellos realizan de los conjuntos numéricos,

> *[…] se pregunta al docente D_{11} [151]: ¿Está bien lo realizado por la estudiante E_{11}? (figura 30), el docente D_{11} responde [152]: "Pues, se ven algunos errores, si claro, el conjunto estaría bien, el error o dificultad es que pone al mismo nivel los números racionales e irracionales, o sea, en este caso no se dio cuenta de la diferencia entre los números irracionales y los números racionales", se pregunta nuevamente [153]: ¿No es claro que los números racionales son diferentes a los números irracionales en los conjuntos?, el docente D_{11} responde [154]: "Exacto".*

Figura 30. Representación auxiliar E_{11} .

> *[…] se pregunta al docente D_{11} [155]: ¿Se había trabajado en clase esta representación de conjuntos?, el docente D_{11} responde [156]: "Si eso se trabaja en clase, pero entonces, los números irracionales se ubican por fuera de los números racionales" (figura 20), nuevamente se pregunta [157]: ¿O sea que la representación no es clara?, el docente D_{11} responde [158]: "Exacto, es decir de todas maneras, el complemento de los números racionales no está mostrado en la representación [muestra la representación realizada por la estudiante (figura 30)], no diferenciaron Q y Q`".* (Becerra Galindo, 2020, p. 183)

El docente D_{11} reconoce que la representación auxiliar de E_{11} (figura 30) presenta errores y dificultades, porque

[2] El código D_{11} significa: D: Docente, Colegio República Bolivariana de Venezuela (IED) (subíndice 11).
[3] El código D_{21} significa: D: Docente, Colegio Tomás Cipriano de Mosquera (IED) (subíndice 21).

pone en el mismo conjunto los números racionales e irracionales, E_{11} no se dio cuenta de la diferencia entre el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{Q}$`) y de los números racionales ($\mathbb{Q}$). A pesar que esta representación es trabajada en la cátedra del docente D_{11}, no es clara para los estudiantes la representación auxiliar de conjunto

A la docente D_{21}, se le muestra un video de la entrevista de sus estudiantes donde surgieron las siguientes representaciones auxiliares: de E_{25} (figura 87) y E_{26} (figura 86). Inicialmente se pregunta a la docente por la representación auxiliar de E_{26} comentándole que en la representación él coloca a los números irracionales ($\mathbb{I}$) en el mismo conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$),

> *[…] la docente D_{21} afirma observando la representación [232]: "En este caso todo lo que está por fuera son irracionales ($\mathbb{I}$)"; el investigador pregunta [233]: En la representación (auxiliar) de los conjuntos, en E_{25} y en E_{26}, representan los números reales ($\mathbb{R}$) y los números irracionales ($\mathbb{I}$) en el mismo conjunto, en este caso ¿Es una representación que sirve para la construcción de los números reales ($\mathbb{R}$)?, la docente D_{21} responde [234]: "Es una representación que no sirve para la construcción de los números reales ($\mathbb{R}$), porque los números irracionales ($\mathbb{I}$) no contienen a los números racionales ($\mathbb{Q}$)".*
>
> *Con respecto a la representación auxiliar de E_{25}, la docente D_{21} afirma [236]: "Esa está peor, o está muy parecida a E_{26}"; el investigador explica [237]: Deja a los números irracionales ($\mathbb{I}$) afuera del conjunto, no pone círculo ni otra figura geométrica allí, ¿Algo está pasando con el tipo de representación?; la docente D_{21} responde [238]: "Sí, y de lo que he visto de las respuesta de los estudiantes, es un poco incómodo para ellos trabajar con los números irracionales y se sienten cómodos con los números naturales, como que les genera confusión el número irracional como interseco o no, como que está aparte, pero no, a veces como que lo meten con los números racionales, y aunque está a parte de los números racionales, lo ponen al mismo nivel de los números reales; veo que no hay claridad con los números irracionales". También se pregunta [193]: ¿Este tipo de representaciones se deben discutir y plantear en la clase para que los estudiantes no las realicen?, y la docente D_{21} responde [194]: "Sí, claro".*
> (Becerra Galindo, 2020, p. 216)

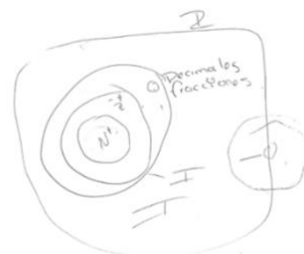


Figura 86. Representación auxiliar E_{26}

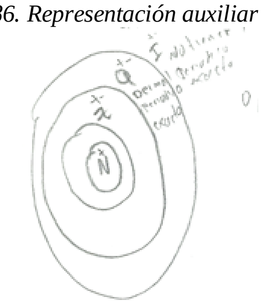


Figura 87. Representación auxiliar E_{25}

En este apartado de la entrevista, la docente D_{21} afirma que estas representaciones "no sirven para la construcción de los números reales ($\mathbb{R}$), porque los números irracionales ($\mathbb{I}$) no contienen a los números racionales ($\mathbb{Q}$)", que no existe una claridad en la representación de los números irracionales, ya que los estudiantes presentan mucha confusión en "el número irracional como interseco o no, como que está aparte, pero no, a veces como que lo meten con los números racionales, y aunque está a parte de los números racionales, lo ponen al mismo nivel de los números reales", además, que este tipo de representaciones se deben proponer en la cátedra, porque sirven para discutir y reflexionar con los estudiantes sobre una correcta representación auxiliar de los conjuntos numéricos, específicamente del conjunto de los números reales.

En este caso se puede ver una problemática específica de la representación auxiliar de los conjuntos de los números reales, donde no existe una igualdad entre la representación de la docente D_{21} propuesta en la cátedra y la de sus estudiantes, lo que no permite la construcción cognitiva correcta de los números reales y de los conjuntos infinitos en general.

Conclusiones

La caracterización de las manifestaciones de la conciencia semiótica producidas en el docente, cuando se le problematiza su elección de representaciones semióticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de los conjuntos infinitos, evidencian la falta de conciencia semiótica, así:

1. El docente D_{11} y la docente D_{21} eligieron para su cátedra una representación auxiliar de conjunto que presenta problemas semióticos. El docente D_{11} afirma que las "representaciones de sus estudiantes presenta errores y dificultades, debido a que ponen en el mismo conjunto los números racionales e irracionales, ellos

no se dan cuenta de la diferencia entre el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y de los números irracionales ($\mathbb{Q}$`)"; la docente D_{21} declara [238]: "Sí, y de lo que he visto de las respuesta de los estudiantes, es un poco incómodo para ellos trabajar con los números irracionales y se sienten cómodos con los números naturales, como que les genera confusión el número irracional como interseco o no, como que está aparte, pero no, a veces como que lo meten con los números racionales, y aunque está a parte de los números racionales, lo ponen al mismo nivel de los números reales; veo que no hay claridad con los números irracionales".

Estas representaciones auxiliares elegidas por los docentes y construidas por los estudiantes, no están representando racionalmente el conjunto de los números reales y los conjuntos infinitos.

3. El docente D_{11} y la docente D_{21} no presentan una conciencia semiótica de las representaciones de los conjuntos infinitos. Además, al definir los conjuntos infinitos lo relacionan con la interpretación de un infinito potencial, definición que no permite la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos dado que se necesita de un infinito actual.

Este artículo aporta, por una parte, algunos datos empíricos que permiten un conocimiento consciente del uso de las representaciones semióticas, en este caso de la representación auxiliar, en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos. Y, por otra parte, contribuye en la línea de investigación clásica relativa a la didáctica del infinito y específicamente del aprendizaje de los conjuntos infinitos.

Referencias Bibliográficas

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5-24.

Arrigo, G., D´Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti*. Trento: Erickson. [Versión en idioma español: (2011). Infinitos infinitos. Bogotá: Magisterio].

Becerra Galindo, H. M. (2017). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 191-201.

Becerra Galindo, H. M. (2018). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos. *II congreso de educación matemática de américa central y el caribe [II CEMACYC]*, 1-8.

Becerra Galindo, H. M., & Font, V. (2019). Las problemáticas semióticas y la metáfora en las representaciones de los conjuntos infinitos. *Revista Acta latinoamericana de matemática educativa [ALME]*, *32*(1), 531-540.

Becerra Galindo, H. M. (2020). *Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. [https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2021/02/Hector-M-Becerra-G-Tesis-doctoral.pdf]

D´Amore, B., Fandiño, M., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio.

Dueñas, W., Garavito, A, & Lara, G. (2007). *Aciertos matemáticos 8.* Bogotá: Editorial Educar.

Duval, R. (1993). Registres de Répresentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. *5*(1), 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang. [Versión en idioma español: 1999, Cali: Universidad del Valle].

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Duval R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En: Radford L., Schubring G., Seeger E. (Eds) (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture*. Rotterdam: Sense Publishers. 39-61.

Duval, R., & Sáenz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (M. Acosta, P. Perry. Trad.). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-the registers of semiotic representations*. Switzerland: Springer.

Fishbein, E. (1992). Intuizione e dimostrazione. En: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Editado por Bruno D'Amore. Bolonia:Pitagora. 1-24.

Fishbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*. Infinity-The Never-ending Struggle. 48, 2-3.

Sierra-Bravo, R. (1994). *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios.* Madrid: Thomson.

Tamayo, M. (2001). *El proceso de la investigación científica.* México: Limusa.

COMPUTATIONAL THINKING AS A MATHEMATICAL EXPERIENCE: PROGRAMMING FOR TEACHERS AND STUDENTS TO DESIGN DYNAMIC 3D GRAPHICAL MODELS

Chronis KYNIGOS[1] & Marcelo MILRAD[2]
[1]National and Kapodistrian University of Athens, Greece
[2]University of Linnaeus, Sweden
kynigos@ppp.uoa.gr, marcelo.milrad@lnu.se

Introduction

The notion of Computational Thinking (CT) is not new. Notably, it originated in Seymour Papert's disruptive approach to learner engagement with mathematical thinking as early as in the 60's (Papert, 1972). In the late 80's, 90's and early 00's however, attention waned from uses of expressive digital media for programming and was rather divert to uses of the awe-inspiring advent of multi-media, the Internet and the web. Interestingly, in the past decade or more we are experiencing a sort of second wave of attention to CT, this time in a much more generalized sense, that of CT being an integral part of computational literacy and citizenship in the digital era (Vacs et al, 2018, Wing, 2006, diSessa, 2001). DiSessa made a clear distinction between the three pillars of this new literacy: digital technology (material pillar) which is the medium for exploration, mental processing, and interpretation of what is explore to personal knowledge (cognitive pillar) and social communication of knowledge (social pillar). In 2006, Wing with her analysis of *computational thinking* expanded the ideas of Papert and diSesssa beyond computer science or mathematical problem-solving. Wing approached computational thinking as "*a set of skills, strategies and behaviours, that draws on fundamental concepts of computer science*", but it can be implemented for solving problems across all disciplines as well as in everyday life. The academic approaches to the value of learning to program have thus progressively perceived it as an expression of algorithmic thought, a new kind of literacy and a set of skills, strategies and behaviors connected to a wider value of cultivating computational thinking for the 21st century citizen.
But what about the value of CT and programming in *mathematics* education i.e. the case of engaging in mathematical thinking through the use of programming as a means of expressing mathematical ideas while tinkering with digital models (Noss & Hoyles, 1996). The potential value of learning to program has mostly been considered, as an end in itself without much thought on how it can be put to use by students for expressing algorithms, mathematical concepts, creating digital objects and behaviors and solving problems. Students have mostly been taught programming through closed and concept-specific these exercises allow them to develop narrow and fragmented knowledge (Gomes & Mendes, 2007, Brennan & Resnick, 2012). One of the most common and most important difficulties that students face in programming as a result, is that they don't have the strategic knowledge to efficiently apply the concepts they learn to solve *mathematical* problems (Robins et al., 2003; Armoni, 2013). Meanwhile, this wave of attention given to CT has affected mathematics curricula in some countries clumsily, by means of demands to add programming to mathematical syllabi in a way devoid of its original core ideas for transforming mathematics education. Update, this has been meet by mathematics teachers mostly as a disjunctive add-on to an already stifling amount of mathematical content or at best as an objective in itself needing well digested mathematics in order to learn a programming language.
In this paper, we would like to suggest an alternative way for mathematics education to make sense of the attention to CT, an approach involving the learning of programming and mathematics *in conjunction*, providing students with experiences in *mathematizations made possible* through programming.

Computational Thinking for Mathematics Education

To do that, we need to go back to the idea of learning through tinkering models which is based on Constructionist theory (Papert &Harel, 1991), a special kind of fallibilist mathematical activity (Ernest et al, 1991) which argues that learning occurs naturally when students take agency while making and sharing tangible digital artefacts (Gauntlett et at., 2009). Constructionism comprises a strong educational design element (Kynigos, 2015), where powerful mathematical ideas are embedded by pedagogical designers in special kinds of artifacts accompanied by construction units and tools, even a construction language in some cases of digital media. Such construction kits are thus designed to provide dense opportunity for students to concretize and express their ideas by designing themselves, building and engineering (Healy and Kynigos, 2010). Thus, in digital constructionist learning environments learners' agency is encouraged since they become designers using technology to build and modify artifacts which become public entities when shared with peers, while teachers act as facilitators of the process (Blikstein, 2013). This view highlights the importance of social participation in the learning process, as well as the emergent productions with usually low social impact range (Papert, 1980).

To make these points, we highlight three different types of activity with a medium specially designed to afford this kind of engagement with mathematics, which we call MaLT2 (http://etl.ppp.uoa.gr/malt2). MaLT2 is a freely available, easily translatable 3D Turtle Geometry modeler based on Logo, the language originally created for programmable mathematics, and affording dynamic manipulation of variable procedure values and 3D camera perusal. The three additional affordances to the original Logo-base Turtler Geometry, i.e. 3D (inspired by Regini, 1985), dynamic manipulation of figural models and camera perusal have a profound effect on the breadth, depth and quality of mathematization opportunities afforded by the medium. They allow hard, elusive, or even unattainable mathematical concepts to become understandable and useable by young learners (Kynigos & Grizioti, 2018).

Our examples are about:

1. A mathematics teacher's options to embed concepts in the program creating a graphical mathematical model.
2. A mathematics teacher's diverse ways to insert a bug in a model in a didactical engineering capacity in order to give the faulty model to students to debug - we call this activity 'half-baking' and the resulting faulty model a 'half-baked' model (Kynigos 2007).
3. Students' potential to use the corrected model as a unit to create a complex animated artifact exploiting the programming affordances of the language (Kynigos & Diamantidis, 2021).

Example 1. Embedding diverse mathematical properties for the letter 'M' model.

The figure below shows three alternative algorithms to create a mathematical model of the letter 'M' ('M' for 'Marcelo'). By “mathematical model” we mean an algorithm embedding the necessary and sufficient properties so that the result can only be that of a depiction at the letter 'M'. The difference between the three algorithms is the property which has been embedded to achieve the result. letterMA contains a simple arbitrary proportional relationship between the vertical segments and the slanted ones. letterMB is based on the appropriate trigonometric functional relationship between these two segments. LetterMC alternatively contains the relationship inherent in the Pythagoras Theorem.

to letterMA :x fd :x rt 135 fd (:x*1.22)/2 lt 90 fd (:x*1.22)/2 rt 135 fd :x end	to LetterMB :x fd :x rt 135 fd (:x/(cos 45))/2 lt 90 fd (:x/(cos 45))/2 rt 135 fd :x end	To letterMC : a :b fd :a rt 135 fd sqrt(:a*:a+:a*:a)/2 Lt 90 fd sqrt(:a*:a+:a*:a)/2 rt 135 fd :a end

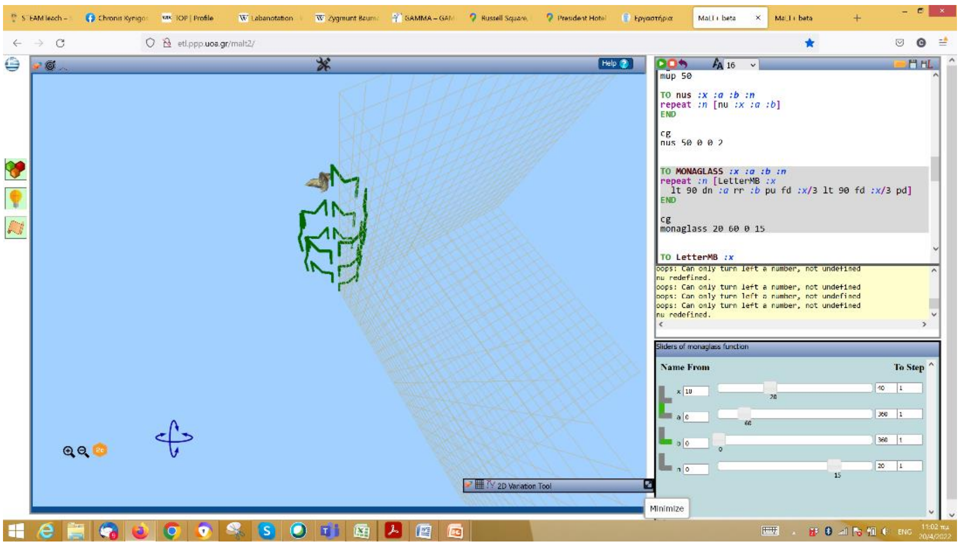
Our point is that in each and any model the teacher - designer has diverse options on which concepts to embed according to their didactical intentions, which concepts they wish theire students to pick up, use and gradually mathematise (see U.D. G. S. model, Noss&Hoyles, 1987)

Example 2. Diverse ways to insert bugs in the letter 'M' model.
In the two algorithms below, we see two different ways to half-bake the model. HBLetterMB has taken away the property that for the model to provide the letter a 135 turn is needed so that the notional triangle embeds a function involving cos 45. The HBLetterMA procedure alternatively has been devoid of any relationship between the vertical and the slanted segments allowing for a totally open investigation as to its nature.

to HBLetterMB :x :y fd :x rt :y fd (:x/(cos 45))/2 lt 90 fd (:x/(cos 45))/2 rt :y fd :x end	to HBletterMA :x :y :z fd :x rt 135 fd :y lt 90 fd :z rt 135 fd :x end

Example 3. An example of programming to generate a structure using the 'M' model as a unit ('M's on a cylindrical sphere - a water glass.
Below we see the pictorial depiction of a program generated by our pre-service mathematics education students using the 'M' model as a unit to create a spiral of 'M's in order to make a model resembling a glass of water given to Marcelo as Birthday present. The algorithm is such that animation of the program changes the diameter of the notional cylinder around which the 'M's reside.

```
to MONAGLASS :x :a :b :n
repeat :n [LetterMB :x
  lt 90 dn :a rr :b pu fd :x/3 lt 90 fd :x/3 pd]
end
```



Here is a way in which the students would describe the essence of variable number while explaining the construction.

> “Out teacher told us to construct a glass with a spiraling letter 'M' printed on it. He suggested we use a variable. Variables are some letters which represent whichever numbers we want. E.g. we made an 'M' with an A vertical segment. This way, we save time because we can put whichever value we want in a variable, which means we can make however many different 'M's and position them however we want, even as prints on a glass surface”.

Conclusions and Future Work

The three examples above show how CT and programming can be *employed to service* mathematical thinking and meaning making. The notion of embedding mathematical concepts and properties in a parametric algorithm creating a figural animation provides teachers with the potential to generate situations where students may focus and use a specific field of concepts. Also, the students might develop experiences with mathematical generalizations such as the idea of a property of a class of figures or constructs or the idea of generalized number and variable. Looking at the issues more closely we saw, through example 1, how a teacher may have diverse options on which concepts to choose to embed in a figural model depending on their students and the required mathematics posed by a curriculum. In the second example, the idea of half-baking, i.e. providing students with questionable algorithms we found to be of value both for focusing students to make sense of concepts expressed by means of a mathematical formalization but also to maintain the extensibility afforded by programming. The third example shows just that, that students may employ programming concepts to exploit their mathematical generalizations to create models, which can be impressive to them but also generated by concise mathematical formalisms. Dynamic manipulation allows for animations affording students with a sense of normalization but also a tangible experience of what changes and what stays the same in a mathematical construction. Considering models in 3D space greatly enhances the mathematics accessible to students for mathematizations in relation to what was possible with non-digital means.

In conclusion, we suggest that there is a need to re-think ways in which CT can come back to serve mathematics education by means of providing students with a representational medium to engage in mathematization experiences through programming. We could imagine a whole curriculum with the multitude of option to embed, half-bake models and the wealth of student solutions and constructions of such models in discursive collectives enhancing both mathematical thinking and vocabulary and most of all bringing back a love for mathematics and mathematical thinking in young people.

References

Armoni, M. (2013). On teaching abstraction in CS to novices. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 32*(3), 265-284.

Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. In *Proceedings of the 2012 annual meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada* , 1–25.

diSessa, A. 2001. *Changing Minds: Computers, Learning and Literacy*. USA: MIT Press.

Ernest, P., Skovsmose, O., Van Bendegem, J. P., Bicudo, M., Miarka, R., Kvasz, L., & Moeller, R. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Springer Open

Gomes, A. & Mendes, A. (2007). Learning to program - difficulties and solutions. International Conference in Engineering Education, Coimbra, 283-287.

Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: Design and construction in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 42*, 63–76.

Kafai B. Y. & Burke Q. (2014). *Connected code: Why children need to learn programming*. Mit Press.

Kohen-Vacs, D, Otero, N, Milrad, M (2018) A Complementary View for Better Understanding the Term Computational Thinking, Proceedings of the International Conference on Computational Thinking Education 2018, Hong Kong: The Education University of Hong Kong , 2018, p. 2-7

Kynigos, C. & Grizioti, M. (2018). Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space. *Informatics in Education*, 17(2)

Kynigos, C. (2007). Half-baked Logo microworlds as boundary objects in integrated design, *Informatics in Education*, 6(*2*), 1–24.

Kynigos, C. (2015) Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design? In *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* Sung Je Cho (Eds) 417- 438, Springer International Publishing Cham Heidelberg New York Dordrecht London, Switzerland 2015.

Kynigos, C., Diamantidis, D. (2021) Creativity in Engineering Mathematical Models Through Programming. The International Journal of Mathematics Education, ZDM, Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01314-6Noss, R., Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Netherlands: Kluwer academic Publishers.

Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics.

Reggini, H. C. (1985). *Ideas y formas: Explorando el espacio con Logo*. Buenos Aires: Galápago

Robins, A., Rountree, J., & Rountree, N. (2003). Learning and Teaching Programming: A Review and Discussion. *Computer Science Education* 13 (*2*), 137-172.

Wilensky, U., Papert, S. (2010). Restructurations: Reformulations of knowledge disciplines through new representational forms. In: *Proceedings of the Constructionism 2010 Conference*. Paris, France, 97.

Wing J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49 (*3*), 33-35.

EL EFECTO DE LA PANDEMIA DE CoViD19 SOBRE LA EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. ACTUACIONES QUE INTENTAN PERSISTIR DESPUÉS DE LA PANDEMIA

Miguel DELGADO PINEDA
miguel@mat.uned.es
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Educación a Distancia
España

Resumen

Evaluar al estudiante es algo esencial en la tarea docente, pues influye en el control de las garantías que todo proceso educativo debe afrontar. En este trabajo presento la experiencia evaluadora de materias de matemáticas en la Universidad Nacional de Educación a Distancia de España, una universidad no presencial, y en un momento álgido de pandemia.

La propuesta evaluadora consiste en un sistema de colaboración en la tarea de evaluación que se desarrollo en el curso 2020-21. Esta fue aplicada en estado de pandemia donde estaba prohibido por la Administración Educativa realizar pruebas en modo presencial. En ese curso se registró el máximo de estudiantes presentados a las pruebas de esa materia de los últimos 12 cursos.

Palabras clave: Evaluación - Evaluación en línea - Cooperación para evaluar - Matemáticas Universitarias - Enseñanza no presencial.

Introducción

Las tareas docentes y discentes esenciales propias de la UNED no se vieron alteradas cuando en febrero de año 2019 se presenta la pandemia por COVID 19. No decimos que la situación personal de estudiantes y profesores no cambiara con la irrupción de la nueva enfermedad, pues el simple confinamiento en casa de todos cambió las dinámicas de estudio y aprendizaje. Era impensable que, en junio o septiembre del año 2019, los estudiantes se presentaran en los centros asociados para realizar la prueba presencial. Estaba prohibido por orden gubernamental. Aunque cabe destacar que las pruebas de acceso a la universidad española de los estudiantes no universitario se realizaron presencialmente por orden ministerial en los momentos duros de la pandemia.

¿Dónde está la singularidad de la propuesta evaluadora que se describe en este trabajo? Esta propuesta es peculiar por la cantidad de evaluadores que intervienen en el proceso, y por la singularidad de esta universidad, por ello es necesario describir someramente a la institución y sus métodos evaluadores.

La Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED, fue creada en el año 1972 como universidad pública de ámbito nacional y depende del actual Ministerio de Universidades; véase García Aretio (2016). Desde hace más de 40 años es la principal universidad española de ámbito internacional y atiende a más de 150.000 estudiantes distribuidos en distintos grados y másteres con una oferta muy amplia. En estos cincuenta años los medios de comunicación han variado tanto que hoy en día nos parece prehistórica la comunicación profesor-estudiante de forma epistolar y telefónica, era una universidad a distancia. No hace muchos años la comunicación vía fax era una herramienta muy usada pues minoraba los tiempos de espera en el acceso a la información y emergieron las primeras herramientas de comunicación aplicables con un computador. Sin embargo, la evolución del universo de herramientas TIC y, sobre todo, los actuales medios telemáticos y de comunicación social han cambiado la imagen de UNED, y hay quienes la integran dentro de la categoría de Universidad En Línea o Universidad Abierta (OnLine University or Open University). Véase García Aretio (2006).

Cualquier labor docente-discente en esta universidad tiene que hacer uso de los recursos disponibles como una red de comunicación de topología estrella, donde la Sede Central, sita en Madrid, es el nodo central al que se unen radialmente los 61 Centros Asociados distribuidos por todas las provincias españolas y comunidades autónomas. Además, existen diversos Centros UNED en distintos países de Europa y América que mantiene conexión directa con la sede central, teniendo en cuenta los diversos usos horarios. Es claro que en un principio no se disponía de una estructura tan compleja como la actual. Ver: www.uned.es

Si bien la docencia recae en los profesores de la sede central, resulta que cada centro asociado dispone de una plantilla de profesores que son denominados Tutores. Estos aportan apoyo presencial (cara a cara) al estudiante y tutelan sus estudios. No tienen libertad de cátedra y están subordinados a las indicaciones académicas de los profesores de la sede central. De esta forma cada centro asociado es como una “pequeña” universidad local, si bien pueden atender a un número muy elevado de estudiantes. Por ejemplo, el Centro Asociado de Madrid gestiona una matricula superior a los 30000 estudiantes, es por ello que escribimos la palabra pequeña entre comillas. La característica de tener una tupida red de centros asociados con características de ser presencial es los que hace que algunos indiquen que UNED es una Universidad Semi-presencial. Ver: unedmadrid.es

Pudiera pensarse que en UNED todo cambia y se adapta a los tiempos de una forma inercial. Sin duda, cambia en todos los aspectos docente y discentes propicios para disponer de una comunicación más nutrida ente profesores, tutores y estudiantes haciendo uso de cualquier tecnología del mercado. Existe una creencia muy difundida desde los años 80 del siglo pasado que indica que si los medios son mejores la enseñanza mejora por el simple hecho de disponer de esa tecnología. Esta creencia pretende hacer del profesor una especie de Superman tecnológico, aunque esa tecnología mute cada cuatro o cinco años.

¿Qué cosas no cambian en UNED? Principalmente, en esencia, hay dos: La estructura y topología de *sede central-profesores* y *centros asociados-tutores, y* las *Pruebas Presenciales,* PP*,* a las que el estudiante debe presentarse para superar las materias en las que se matriculó.

El proceso de evaluar a un estudiante es algo esencial en la tarea académica de una institución, como control de las garantías de calidad educativa, véase Pérez (206). Desde su inicio, UNED emplea la realización de una prueba escrita realizada de forma presencial con el estudiante asistiendo a algún centro asociado nacional o algún centro internacional propio. Ahora bien, han existido proyectos innovadores para evaluar en UNED, un par de ejemplos puede ver es Carreras Bejar (1998) y García Llamas (2012).

La logística empleada por UNED para hacer llegar el contenido de la prueba presencial al estudiante y para que la respuesta del estudiante llegue al profesor ha ido variando con el tiempo. Sin embargo, la presencia de profesores de la sede central en las pruebas presenciales en todos los centros asociados se ha mantenido para avalar las condiciones de la prueba tal y como se hace en una universidad presencial.

Desplazar profesores fuera de Madrid conlleva emplear recursos económicos importantes, por ello, se establecen dos convocatorias para realizar las pruebas presenciales: una denominada Ordinaria, en febrero para las asignaturas del primer cuatrimestre y en junio para las asignaturas del segundo cuatrimestre, y otra denominada Extraordinaria, en septiembre tres semanas antes de iniciar un nuevo curso en octubre. Para cualquier prueba de cualquier asignatura, el estudiante dispone un tiempo máximo de dos horas y un mínimo de media hora según un calendario pruebas.

Existe la posibilidad de que el estudiante realice, voluntariamente, alguna prueba objetiva calificable vía online con un peso marginal en la composición de la calificación final. Esta prueba se debe realizar antes de la prueba presencial obligatoria.

La pandemia obligó a UNED al cambio: de *Prueba Presencial* a *Prueba Personal telemática* en vivo. En la PPt se emplearon las herramientas que disponían en su plataforma y una nueva aplicación denominada AvEX en junio y sólo AvEX en septiembre. La aplicación AvEX que se realizó en dos meses, tiempo record desarrollo y explotación. Con esta aplicación se mantenía los estándares de seguridad y seriedad análogos a la prueba presencial aunque fuera en línea. Eso obligó a variar el calendario de exámenes que está restringido a dos semanas en la convocatoria ordinaria y a balancear la cantidad de estudiante en esas dos semanas. Piénsese que había una potencial población (150000) con derecho a realizar la prueba personal, y que, muy probablemente, no existía otra universidad que pueda afrontar un acceso acreditado y certificado de más de 30000 estudiantes de forma simultánea a una misma hora. Véase García Aretio (2020)

La pandemia continuó en el curso en el curso 2020-21, pero UNED ya estaba preparada para seguir controlando la nueva prueba personal puesto seguía prohibido realizar pruebas forma presencial.

En este trabajo se presenta una propuesta de evaluación en el curso 2020-21 que se realizó en una asignatura del grado de Matemáticas denominada Lenguaje Matemático, Conjuntos y Números, LMCN, que tuvo gran aceptación por parte de los estudiantes y permitía una forma de colaboración en la tarea evaluadora de los profesores y los tutores de los centros asociados siguiendo un planteamiento telemático en directo. Es decir, no es una situación donde el estudiante accede a un lugar y se descarga una prueba, si no que el estudiante se acredita y actúa constantemente con la aplicación y que registra los cambios producido por el estudiante en las cuestiones de examen. Es necesario destacar que en el curso 2020-21 se registró el número máximo de estudiantes presentados a pruebas en algunas de estas materias en los últimos 12 cursos. También, se destacan las opiniones de los estudiantes sobre dicho proceso y del deseo de seguir con él una vez que se superara la pandemia.

El marco del nuevo proceso de evaluación

¿No nos equivocamos si pensamos que la enseñanza matemática, en general, sufrió una amplia restricción en el periodo de pandemia? No. El motivo principal fue tener que emplear medios telemáticos, por necesidad, en el desarrollo docente. Esto fue muy patente en aquellas instituciones presenciales tanto universitarias como no universitarias.

La creatividad del profesorado y de las instituciones académicas tuvo en ese periodo que afinarse para asegurar, en cierta medida, que el proceso docente-discente continuara con buen rumbo. En esto los profesores de UNED teníamos experiencia acumulada y sólo fue necesario reforzar nuestros servidores y plataforma informática. Claro que no entramos en un análisis psicológico del efecto de la pandemia.

En lo relativo a las universidades presenciales resultó que la exposición de contenidos se soslayó haciendo lo mismo desde el hogar en lugar del aula. Se emitió vía internet aquello que se haría en el aula. No importaba si con anterioridad a la pandemia, el profesor seguía una estrategia de clase magistral u otra. En un primer momento se solventó la dificultad emitiendo… “lo que fuera”. El caso era actuar eficazmente de alguna forma. Sin embargo, la estrategia UNED no varió, simplemente la atención al estudiante la ejercían los profesores y los tutores desde sus domicilios. En esencia, nada cambió en la UNED con los docentes, pero si hubo bastantes cambios en los estudiantes puesto que las condiciones anímicas y familiares influyeron es una participación mucho menor que en cursos anteriores, al menos en el curso 2019-20.

En el curso 2020-21 la pandemia seguía, pero el estudiante UNED se había repuesto de lo ocurrido en el curso anterior. Ya estaba acostumbrado a estar en confinamiento y se incrementó su participación. Además, se interesó en utilizar las aplicaciones telemáticas que favorecen los encuentros en la red tales como Meet, Teams, Zoom y la propia de UNED. La razón de su uso es clara ya que estas aplicaciones permiten cierto nivel de interactividad de todos los asistentes a una sala virtual, y a cierta escala. Los medios indicados y otros más fueron el vehículo de comunicación en el mejor de los casos. Así, profesores poco experimentados en los medios y estrategias comunicativas no presenciales se encontraban en una situación donde estaban innovando y se entendía digna de ser referenciada en un artículo para publicación en las revistas educativas. Al fin y al cabo, inventar nuevos procesos educativos una vez que estás aislado por el COVID-19 no es tan fácil.

Podemos intuir que bastante tenían los profesores con replicar lo que mejor sabían hacer en el aula con las restricciones que se tienen en una pantalla de ordenador. Las instituciones, los profesores, los estudiantes pudieron sentirse más o menos contentos puesto que se iniciaban en otro mundo comunicativo. Rápidamente, las revistas educativas quisieron artículos sobre las diversas formas de operar en la pandemia. Se describieron un nuevo nicho ecológico para la revista educativa que casi no había sido tratado.

Solicitaron artículos para posicionarse en ventaja con otras, y estuvieron muy contentas pues tuvieron un montón de artículos describiendo supuestas experiencias generalizables.
La situación dibujada con la pandemia no tuvo las mismas restricciones de las universidades presenciales en las universidades no presenciales. Aunque tanto profesores como estudiantes estuvieron confinados en sus casas, la vertebración del estudio no presencial palió la situación pandémica. Otra cosa es la situación anímica de casa miembro educativo.
En pandemia, UNED tuvo que actuar y actuó. Se realizaron actuaciones que no se hacían antes de la pandemia por impensables. El principal punto negro académico o punto de mayor dificultad fue la forma de evaluar al estudiante sin realizar pruebas presenciales por imposición legal. Recordamos, que en UNED, la parte que más pesa en la evaluación es lo que obtenga estudiante en las llamadas Pruebas Presenciales. Aunque existen otras posibles actuaciones, pero son marginales.
Nuestra asignatura en la experiencia evaluativa es Lenguaje Matemático, Conjuntos y Números que es una asignatura tronca de primer cuatrimestre del grado de Matemáticas. La materia se desarrolla en siete temas: Nociones de Lógica. Conjuntos. Relaciones y aplicaciones entre conjuntos. Operaciones internas y estructuras algebraicas. Los números naturales y los números enteros. Los números racionales y los números reales. Los números complejos.
El equipo docente estuvo formado por dos profesores del Departamento de Matemáticas Fundamentales de la Facultad de Ciencia: el autor, con una carga docente del 90% en la asignatura, y M.J. Muñoz Bouzo con una carga del 10%. Ambos profesores son los autores del texto recomendado como texto de estudio desde el año 2010. Texto que ha tenido varias ediciones y revisiones hasta el año 2022.

Logo del Grupo de Innovación Didáctica **π**-Mat

Dicho equipo docente forma parte de un Grupo de Innovación Educativa de título *Innovación en Matemáticas* codificado como GID2016-2l y reconocido como **π**-Mat, donde el autor es el coordinador de este GID. También, son miembros del proyecto de Innovación Educativa que se desarrolló en el curso 2020-21 de título: Optimización Global del Espectro Multidimensional de la Innovación Didáctica Matemática, donde el autor es coordinador de este PIE.

Descripción de la experimentación

La experiencia estuvo enmarcada dentro de nuestro PIE en la categoría Asignaturas 40/60 donde se hacía referencia a la pregunta ¿Cómo evaluar una materia del Grado de Matemáticas de forma cooperativa?
Esencialmente consistía en emplear la *Evaluación como herramienta para el aprendizaje*. Si bien en dicho proyecto se propuso experimentar con otras tres asignaturas más, otra del grado de Matemáticas, Algebra I, y dos del grado de Medio Ambiente; Matemáticas I y Matemáticas II. En Matemáticas I y II no se desarrolló el final debido a la cantidad de trabajo y la coincidencia del profesor; el autor.
Nuestra experiencia se centró en la asignatura LMCN con el título de *Evaluación ponderada en la asignatura de Lenguaje Matemático, Conjuntos y Números*. Experimentación que fue comunicada en unas Jornadas de Innovación gestionadas por el Instituto Universitario de Educación a Distancia, IUED, de UNED.
El equipo de evaluadores estuvo formado por los profesores del equipo docente; Delgado Pineda y Muñoz Bouzo, y por los tutores de los centros asociados: N. Montserrat Grau, S. Bofill Serra, P.P. Alegría Ezquerra, A.J. Calderón Martín, J. Cayetano Rodríguez, S. Riera García y M. Delgado Pineda, este último como tutor de Centro Asociado de Madrid.
Las tareas principales de los profesores se encuadran en las actuaciones

- Gestión, supervisión y control de los todos los foros de la zona virtual.
- Edición, activación y descarga de la hoja del cálculo de los formularios de todas las pruebas.
- Creación de foros específicos sobre dudas de cada una de las pruebas.
- Creación, edición, activación y descarga de la hoja del cálculo de los formularios de las pruebas personales ordinarias y extraordinarias.
- Realización de una web-conferencia de presentación de la asignatura, y otras posibles web-conferencias si hubiese demanda.

La dedicación docente e investigadora de los profesores se cuantifica en treinta horas semanales de las cuales eran ocho las horas semanales de forma presencial en la sede central; supuesta una situación normal.
Las tareas de los tutores fueron:

- Seguimiento de foro de un único temático acceso a todos los estudiantes. Cada tutor se encarga de contestar a todas las dudas que se generan con el estudio de los estudiantes. Circunstancial lo de siete tutores y siete temas.
- Realización de dos web-conferencias globales relativas al tema que le corresponda. Conferencias con una duración mínima de una hora y máxima de dos; dos horas casi siempre. Estas se hacen en directo en dos semanas distintas con el fin de facilitar el aprendizaje del estudiante. Las web-conferencias están activas bajo demanda todo el curso.
- Selección de las preguntas para la prueba del tema correspondiente. Así como, el envío de esas preguntas al equipo docente.
- Seguimiento del foro de dudas y reclamaciones de la prueba objetiva que se realizó de su tema. Este foro por tema se creó para que el foro de seguimiento no experimentara un aumento de mensajes una vez realizada la prueba.
- Realización de las rectificaciones necesarias en la hoja de cálculo de las calificaciones de su prueba. Las hubo en todas las pruebas objetivas calificables.

La dedicación docente de los tutores se cuantifica en 1 o dos horas semanales.
El método de evaluar sólo se experimentó para la prueba personal ordinaria de tal forma que las actuaciones con los estudiantes finalizaron en febrero del año 2021.
El equipo docente puso dos pruebas en directo de forma telemática

1. Prueba Objetiva Calificable en línea denominada PEC, usando la herramienta de formularios de Alf; la plataforma UNED. Cuyas características son:
    a. La PEC era voluntaria para el estudiante.
    b. El profesor puede elegir la fecha y la hora para realizar la prueba.
    c. La duración fue de 60 minutos. Transcurrido ese tiempo, ya no había forma de enviar el formulario.
2. Prueba Personal Ordinaria en línea utilizando la aplicación AvEX que sólo se utilizaron para las pruebas ordinarias y extraordinaria.
    a. La PPO sólo se realizan en una de las dos semanas disponibles.
    b. La prueba se ciñe a la fecha y la hora establecida por la Secretaría General de Pruebas Presenciales.
    c. La duración fue de 120 minutos. Transcurrido ese tiempo, ya no había forma de enviar el formulario.

El equipo de tutores propuso siete pruebas, una por tema, denominadas Prueba de Tutor, PT, desde 1 al 7. Se realizaban en línea usando la herramienta "formulario de Alf".

a. La PT era voluntaria para el estudiante.
b. El profesor pone la fecha y la hora para poder realizar la prueba. La PT del tema *n* se realizó el sábado de la semana siguiente a la semana de la segunda web-conferencia del tema *n+1*; semana en la se hacía la primera web-conferencia de ese tema siguiente
c. La duración fue de 60 minutos. Transcurrido ese tiempo, ya no había forma de enviar el formulario.

Al estudiante se le ofertaron tres posibles trayectorias para ser evaluado, éste no tenía que optar por una de ellas hasta un momento decisivo. Inicialmente estaba en las tres trayectorias hasta el mes de diciembre. El decidía el camino a seguir sin necesidad de comunicárselo a nadie.
Se dispuso de una trayectoria experimental en la cual obligatoriamente se entraba si el estudiante realizaba de cinco a siete PT. Hiciera las que hiciera, se elegían las cinco mejores calificaciones de esta pruebas para hacer una calificación media de tutor, M_{PT}.
Esta decisión de considerar sólo las cinco mejores calificaciones fue estratégica, motivada porque el curso empieza la primera semana de octubre, pero el plazo de matrícula no se espira hasta el 15 de noviembre. Bastantes estudiantes se matriculan después de más de veinte días desde el comienzo del curso. De todas formas, era imprescindible realizar la Prueba Personal, con la cual conseguía una calificación N_{PP}.
La calificación final, N_F. se obtenía mediante la expresión $N_F = 0{,}3M_{PT} + 0{,}7N_{PP}$.
Bastó que un estudiante hiciera un máximo de cuatro pruebas para poder optar por una trayectoria tradicional, en ese caso $N_F = N_{PP}$, o una trayectoria semi-tradicional que se caracteriza por que el estudiante realizaba la prueba objetiva PEC. La calificación de la PEC N_{PEC} sólo aportaba un peso mínimo a la calificación final que se calculaba con la expresión $N_F = máx\{N_{PP},\ 0{,}1M_{PEC} + 0{,}9N_{PP}\}$ en el caso que $N_{PP} \geq 4$.
El estudiante podía elegir realizar las pruebas PEC y las PT, teniendo en cuenta las siguientes condiciones: Si se hacen cinco o más PT, entonces está dentro de la trayectoria experimental forzosamente y no se puede renunciar. En este caso la posible realización de la PEC no servía para nada. Algunos estudiantes se sólo realizaron cuatro PT ante la falta de seguridad en sus aprendizajes. Hay que recordar que se realizaba una PT cada dos semanas.

Cada prueba PT, PEC o PP generaba una hoja de calculo con las repuestas de las estudiantes, aciertos y fallo y calificación de la prueba. La dificultad de combinar las 10 hojas de cálculo no fue despreciable pues era manual, más cuando se repararon algunas calificaciones en cada prueba. De todo esto se encargaba el profesor sin asistencia técnica informática.
De una población inicial de 1373 estudiantes matriculados, la muestra de presentados a la Prueba Personal fue de 582 estudiantes, 42,3%, mientras que la muestra de presentados a la PEC fue de 256 estudiantes, 18,8%. De los 582 de la PP sólo 205 estudiantes optaron por la evaluación experimental, 14,9% global. Además, en todo el proceso experimental participaron 597 estudiantes, 43,4% global, aunque sólo lo completaran 205, 34,3%, de los que comenzaron.

La distribución de los participantes en la experiencia fue:

- PT 1: 415 estudiantes, 30,2%. 3ª semana lectiva del curso.
- PT 2: 415 estudiantes, 30,2%. 5ª semana lectiva del curso.
- PT 3: 393 estudiantes, 18,6%. 7ª semana lectiva del curso.
- PT 4: 292 estudiantes, 21,2%. 9ª semana lectiva del curso.
- PT 5: 239 estudiantes, 17,4%. 10ª semana lectiva del curso.
- PT 6: 211 estudiantes, 15,3%. 11ª semana lectiva del curso.
- PT 7: 210 estudiantes, 15,3%. 13ª semana lectiva del curso.

Naturaleza de las pruebas y resultados obtenidos

Desde el año 2010 hasta el mes de febrero del 2019 las Pruebas Presenciales de esta asignatura fueron exámenes de cuatro problemas de desarrollo. Después de ese febrero tuvimos que utilizar la aplicación AvEX con acceso telemáticas previa identificación con la cuenta de correo de estudiante UNED y la clave de seguridad (password).

La aplicación permite realizar pruebas de desarrollo, pruebas de respuestas propuestas con marcado de opciones correctas, vulgarmente llamadas test, y pruebas mixtas. En el caso de un problema de desarrollo, el estudiante puede escribir su respuesta directamente en la aplicación o introducir un o más fichero pdf por problema con una foto realizada con un Smartphone del papel del desarrollo.

Dado el número de estudiante que podrían presentarse a la Prueba Personal Ordinaria En Línea, el equipo docente opto por una prueba de 10 preguntas que el estudiante debía resolver de forma tradicional para poder optar por una única de las tres opciones que acompañaban al enunciado. Este tipo de prueba ya se había tratado con esa misma aplicación en la Prueba Personal Extraordinaria de septiembre del 2019.

En Gaona (2006) se tratan las dificultades de elegir problemas para poder evaluar a los estudiantes., mientras que en Delgado (2002) se índica un método para automatizar problemas personalizados para cada estudiante. En ambos casos se tratan problemas de enunciados estándar y con resolución por desarrollo. En nuestro caso, cada pregunta tenía un enunciado estándar y tres posibles respuestas. Estas respuestas se redactaron de forma que no aportaran información adicional al estudiante. Un ejemplo clarifica lo que decimos: El problema del cuadro 1 no aporta información adicional.

Si $a + ib$ es una de las dos raíces de la ecuación cuadrática

$$(2+i)z^2 + (-1+2i)z - 3 - i = 0,$$

entonces se cumple

A. $a < 3$.
B. $b^2 \geq 4$.
C. *Ninguna de las otras dos respuestas.*

Cuadro 1: Enunciado de un problema tipo

Es claro que para tener seguridad de que opción elegir, la única estrategia razonable consiste en resolver la ecuación mediante el desarrollo completo y comprobar si alguna de las raíces cumple alguna de las condiciones de las posibles respuestas.

Los problemas como los del cuadro 2 que aportan información adicional en las opciones, eran descartados como problema de cualquier prueba.

> *Si* $a + ib$ *y* $c + id$ *son las dos raíces de la ecuación cuadrática*
> $$(2 + i)z^2 + (-1 + 2i)z - 3 - i = 0,$$
> *entonces se cumple*
>
> A. $a + c < 3$.
> B. $b + d \geq 4$.
> C. *Ninguna de las otras dos respuestas.*

Cuadro 2 Tipo de enunciados descartados

Es claro que no hay necesidad de resolver la ecuación para saber cuál es la respuesta correcta, puesto que basta hacer $(z - a - ib)(z - c - id)$ e identificar coeficientes.
Una vez decida la forma de la PP y del tipo de opciones de los problemas, se extendió este criterio a la PEC, sólo de los temas del 1 al 6, y las PT de cada tema. La única diferencia entre PP y las otras pruebas, con independencia de la aplicación sobre la que se realizaba y la duración, es que las diez preguntas que le correspondían a un estudiante se extraían al azar de un banco de 60 preguntas dividido en 10 categorías.
En Zumbado-Castro (2016) se indica una forma de descomponer problemas de forma que se defina una rúbrica aditiva. Ahora bien, los problemas universitarios de Matemáticas no son fácilmente descomponibles en módulos independientes, puesto que unos módulos están relacionados con otros.
Cada una de las respuestas correctas sumaba un punto a la calificación y cada una de las incorrectas restaba medio punto. Con esa valoración se establece que la esperanza matemática de superar una prueba al contestar las preguntas al azar es nula. Ahora bien, un estudiante puede carecer del dominio suficiente en una parte, pero dispone de algún conocimiento relativo a una pregunta, pero con opciones como las indicadas anteriormente se evita que descarte fácilmente una de las opciones y que elija sólo entre dos opciones.
Algunos tutores opinaron que poner problemas de este tipo no era ideal para evaluar el conocimiento matemático del estudiante, pero eso no es así. El motivo principal es que el estudiante desarrolle todo el problema para poder elegir con seguridad. Otra cosa es que el estudiante decida una marca de otra forma.
Algunos estudiantes opinaron que nuestros problemas estaban para pillar, puesto que la tercera opción les desconcertaba sobre todo si había cálculos por medio. La respuesta es la misma, pues la resolución desarrollada es lo mejor y casi no admite otra estrategia razonable para responder a nuestros problemas. Se avisó al estudiante que algunas respuestas correctas era esa tercera opción según un número elegido al azar.
El conocimiento y destreza de cálculos se puede asegurar con este tipo de preguntas, pero no conocer la capacidad discursiva razonada del desarrollo del problema. Eso si que es una debilidad de este tipo de problema.
De los 582 estudiantes de la Prueba Personal y más de un 75% de estos habían realizado alguna prueba tipo Prueba de Tutor. Todos los estudiantes que habían elegido la trayectoria experimental se presentaron a la PP. La razón era simple, la ponderación de notas de las cinco PT sólo afectaba a la calificación en la convocatoria de febrero.

Matriculados 1350			
	1ª P.P. Febrero		
	Frec.	Porc.	Acum.
Presentados	586	43,41 %	43,41 %
No Presenta.	764	56,59 %	100,00 %
Apto			
No Apto			

Cuadro 3: Estadística oficiales de presentados

El número de 582 estudiantes presentados contrasta con el número de presentados del cuadro 2. Esto se explica por que esos cuatro estudiantes de diferencias son los que están en Centros Penitenciaros que no contaban en la experiencia. También se detecta una diferencia del dato de 1373 estudiantes matriculados

frente a 1350 del cuadro 3, esto se explica por el momento en los que se hacen los cálculos. Las pruebas se realizan a lo largo del primer cuatrimestre por lo tanto aun no se ha anulado matrícula como así ocurre una vez que se hace la Prueba Presencial.
La media de puntos aportados por las PT a la calificación final fue de 2.14 sobre un máximo de 3. Además, hubo 66 estudiantes con las PT que no consiguieron superar la asignatura, 32,2% frente a 139 estudiantes que la superaron, 67,8%.
Respecto a las calificaciones finales se observo el contraste de nota medias de los estudiantes, la de los que no hicieron el proceso experimental fue de 3,9 puntos frente a 6,1 de los que siguieron el experimenta proceso de evaluación.

Pendiente	263	44,88 %
Suspenso		
Aprobado	159	27,13 %
Notable	122	20,82 %
Sobresaliente	42	7,17 %
Matricula H.	0	0,00 %

Cuadro 4: Distribución de notas por categorías

Al revisar el cuadro 4 se observa que no figura número en la casilla de suspensos. La razón es administrativa puesto que suspender en la PP ordinaria no se contabiliza como convocatoria consumida. Sólo la PP extraordinaria cumple convocatoria.

Una distribución de calificaciones finales puede observarse en el cuadro 5, si bien en esa tabla contiene la información mezclada de los dos estratos: los estudiantes con trayectoria experimental y los de trayectorias tradicional.

0.00 - 1.00	69	11,77 %	11,77 %
1.00 - 2.00	50	8,53 %	20,30 %
2.00 - 3.00	48	8,19 %	28,49 %
3.00 - 4.00	65	11,09 %	39,58 %
4.00 - 5.00	31	5,29 %	44,87 %
5.00 - 6.00	95	16,21 %	61,08 %
6.00 - 7.00	64	10,92 %	72,00 %
7.00 - 8.00	64	10,92 %	82,92 %
8.00 - 9.00	58	9,90 %	92,82 %
9.00 - 10.00	42	7,17 %	99,99 %
Total	586	99,99 %	99,99 %
Media	4,74		
Desviación	2,89		

Cuadro 5: Distribución de calificaciones numéricas

La opinión de los participantes en el proyecto

El equipo docente entendió que realizó mucho trabajo y que se empleó mucho tiempo libre del estudiante, puesto que las PT se hicieron en sábado, eso si consensuado con ellos. Aunque estaban satisfechos con los resultados y los comentarios de los estudiantes. Una vez calificados todos, se solicitó opinión escrita por correo electrónico a los estudiantes que experimentaron la nueva forma de evaluación.

Al equipo le queda la duda de si se ha mantenido la seguridad de identificación del estudiante en las PT. Estima que se utilizó el texto base recomendado en todas las pruebas y hay indicios de que los estudiantes colaboraron al hacer cada una de las pruebas empleando redes sociales.

Los tutores indicaron que la modalidad que les permitía colaborar en la evaluación de los estudiantes era un incremento de trabajo para el tutor, ya que debía buscar editar y enviar los problemas para sus pruebas de tutor. Por otro lado, la recalificación de las pruebas a mano indicaba que la aplicación Alf no era la adecuada. También indicaron que los foros de dudas de las PT les duplico el trabajo de contestar a los estudiantes.

Lo que más les pesó en su tarea evaluadora es tener que modificar calificaciones, puesto que esto indicaba que había fallos en las plantillas y erratas en los enunciados. Saber que puedes fallar ante tanto publico no es muy agradable.

A los tutores se les pidió la opinión por escrito al igual que a los estudiantes. Un ejemplo de contestación de tutor es:

"*Referente a los estudiantes yo creo que se puede valorar positivamente este tipo de evaluación. Han sido mucho más constantes y eso ha permitido que muchos de ellos hayan trabajado la asignatura desde el principio...*

Queda patente que el tipo test no es la mejor manera de evaluar en un grado de Matemáticas (visto los errores que se han producido en todas las pruebas). … que se ha hecho con una total improvisación…"

Es cierto que los tutores desempeñaban esa labor en cursos anteriores con otro equipo docente y no intervenían en el proceso de evaluación. La inercia de más de cuatro cursos no es fácil de cambiar. Lo que más les pesó en su tarea evaluadora es tener que modificas calificaciones, puesto que esto indicaba que había fallos en las plantillas y erratas en los enunciados.

Respecto al efecto sobre los estudiantes cabe destacar que ha servido de incentivo al estudiante, y este he regulado mejor su preparación, aunque sea por un estímulo externo como la eran las PT. Además, se valora muy positivamente la decisión, acierto total, de sólo elegir las 5 mejores calificaciones de las PT.

A los estudiantes se le pidió su opinión, pero primero debían contestar a las preguntas

1. ¿Concluyó el proceso experimental?
2. ¿Cuántas PT realizó?
3. ¿Ha servido la calificación de PT para superar la asignatura, si no superó la PP?
4. ¿Ha subido la calificación una vez superada la PP?

Los estudiantes indican que la programación de web-conferencias y PT ha sido muy acertada. De todo el conjunto de opiniones presentamos algunas que recogen el pensamiento genérico de los estudiantes.

Estudiante 1: *"…Me ha parecido un sistema ESPECTACULAR para el alumnado, y lo hecho en falta en las materias del segundo cuatrimestre…"*

Estudiante 2: "*…para mí ha sido muy positivo (a pesar de que no la haya aprobado) el hecho de que se hayan hecho pruebas por temas, ya que me ha obligado a intentar llevar el ritmo de la asignatura. De lo contrario, me hubiera retrasado más en el estudio de los temas, por temas de trabajo y obligaciones urgentes…*"

Estudiante 3: "*… mi opinión es favorable a este método de evaluación porque, obliga a un trabajo continuo que siempre es positivo para el aprendizaje. Creo que este sistema es excelente en el sentido de que obliga a llevar al día los temas y preparar la prueba final. Además, se han dado muchas opciones para obtener la mejor nota…*"

Conclusiones

El proyecto evaluador que UNED intenta impulsar con la línea de innovación Asignaturas 40/60 puede acarrear un exceso de trabajo al tener que evaluar en modo colaboración a los equipos docentes y a los tutores correspondientes a ese equipo. Además, es muy probable esos tutores están actuando con otros equipos docentes.

El método experimental empleado en la evaluación se ha mostrado muy eficaz puesto que los resultados así lo avalan. Ha permitido concienciar al estudiante de la línea de trabajo que se debe seguir en el estudio de una asignatura y establecer su pauta. Esto que puede ser considerado un acierto visto el número de estudiantes que opto por este tipo de evaluación, puede chocar con la situación social, familiar y laboral del estudiante UNED y hacer que algún estudiante prefiera el método tradicional UNED.

Este plan de evaluación colaborativa es una innovación totalmente nueva en el grado de Matemática, en la facultad de Ciencias, en UNED. No parece factible extender este sistema a las demás asignaturas de grado, de hecho, en el curso 2021-22 no se ha aplicado puesto que las condiciones de profesor como de los tutores ha cambiado al producirse jubilaciones.

Referencias Bibliográficas

[1] Carreras Bejar, C. Una experiencia innovadora en la evaluación de la asignatura de Óptica de la UNED. e-spacio.uned.es 1998.

[2] Delgado Pineda, M. *Nuevas tecnologías en enseñanza: generación automática de Pruebas de evaluación con problemas de enunciado aleatorio*. 100@uned, 2001. e-spacio.uned.es

[3] Gaona, J. *Panorama sobre los sistemas de evaluación automática en línea en matemáticas*. Revista Paradigma (Extra 2), Vol. XLI, 2020 / 53 – 81

[4] García Aretio, L. La Universidad de Educación a Distancia (UNED) de España. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a …, 2006 - redalyc.org

[5] García Aretio, L. Los inicios históricos de una compleja universidad pública a distancia: la UNED de España. RIED: Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2016 - e-spacio.**uned**.es

[6] García Aretio, L. Evolución de las Pruebas Presenciales en la UNED de España. 2020 - e-spacio.**uned**.es

[7] García Llamas, M.C. Suárez Riestra, M.C. Rodríguez Ruíz, J. *Experiencia sobre la evaluación continua en la enseñanza a distancia de las matemáticas*. Anales de ASEPUMA, ISSN-e 2171-892X. Nº 20, 2012.

[8] Pérez, O. *¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas?* Relime, Nº 2, Ciudad de México, 2006.

[9] Zumbado-Castro, M. Evaluación sumativa para la resolución de problemas en el área de Geometría. Innovaciones Educativas, 2019, revistas.uned.ac.cr.

HACIA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INCLUSIVA MEDIADA POR LA TECNOLOGÍA

Carina Soledad GONZÁLEZ GONZÁLEZ
Departamento de Ingeniería Informática y Sistemas, Universidad de La Laguna
España
cjgonza@ull.edu.es

Resumen

La educación es un derecho humano fundamental y todas las personas deberían poder acceder a ella. La educación inclusiva establece que se deben eliminar las barreras de acceso y atender a la diversidad para que todas las personas hagan efectivo este derecho humano de acceso a la educación. Por otra parte, la educación STEM/STEAM es un área de creciente interés científico, político y social, que está aún inmadura, y, por tanto, aún no existe consenso en cómo debe ser integrada en el currículum. Dentro de la educación STEM/STEAM encontramos a la tecnología ligada con la educación matemática y la importancia de la enseñanza de la programación relacionada con las matemáticas. En este trabajo presentamos un recorrido por estos conceptos, sus relaciones, principales hallazgos y un ejemplo de proyecto de investigación que aborda la alfabetización STEM/STEAM desde un enfoque inclusivo y co-educativo.

Palabras clave: Inclusión – Educación – Tecnología – STEM – STEAM.

Introducción

Todas las escuelas deben asumir a la educación como un derecho humano fundamental, tal y como es definida por la Declaración Mundial de los Derechos humanos, art. 26 (Naciones Unidas). De esta forma, se debe asegurar que todas las personas puedan acceder a la educación respetando la diversidad. En este sentido la UNESCO (2008), define a la educación inclusiva como:

> *"La educación inclusiva puede ser concebida como un proceso que permite abordar y responder a la diversidad de las necesidades de todos los educandos a través de una mayor participación en el aprendizaje, las actividades culturales y comunitarias y reducir la exclusión dentro y fuera del sistema educativo. Lo anterior implica cambios y modificaciones de contenidos, enfoques, estructuras y estrategias basados en una visión común que abarca a todos los niños en edad escolar, y la convicción de que es responsabilidad del sistema educativo regular educar a todos los niños y niñas. El objetivo de la inclusión es brindar respuestas apropiadas al amplio espectro de necesidades de aprendizaje tanto en entornos formales como no formales de la educación. La educación inclusiva, más que un tema marginal que trata sobre cómo integrar a ciertos estudiantes a la enseñanza convencional, representa una perspectiva que debe servir para analizar cómo transformar los sistemas educativos y otros entornos de aprendizaje, con el fin de responder a la diversidad de los estudiantes. El propósito de la educación inclusiva es permitir que los maestros y estudiantes se sientan cómodos ante la diversidad y la perciban no como un problema, sino como un desafío y una oportunidad para enriquecer las formas de enseñar y aprender".*

Entonces, podemos ver a la educación inclusiva como un derecho y un principio, donde se tienen que garantizar las condiciones para que las personas puedan acceder y disfrutar de este derecho, a través de la eliminación de las barreras que puedan impedir su disfrute. Esto incluye la erradicación de la discriminación en cualquiera de sus formas.

Por otra parte, la educación STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics, siglas en inglés) es actualmente reconocida mundialmente y su importancia aumenta cada día, incrementando también el número de investigaciones en revistas, libros y conferencias. Sin embargo, estudios recientes (Li et al., 2020) muestran que la educación STEM, al ser un campo nuevo, no está bien definida, existiendo numerosas formas de considerarla y distintos problemas que deben ser atendidos, como su enfoque inclusivo.

Actualmente, la infrarrepresentación de las niñas y las mujeres en los campos de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (STEM) es una preocupación constante para la sociedad, la política y las empresas. Existe una creciente necesidad de una futura fuerza laboral que sea competente en el campo tecnológico. Por ello, los programas educativos nacionales y las iniciativas privadas se centran en la alfabetización en STEM, haciendo que la programación y el pensamiento computacional sean una prioridad para la educación.

Una de las creencias que existen alrededor de las chicas es que son menos competentes en las áreas STEM, y esto influye en la autopercepción de sus capacidades y en una menor motivación a elegir carreras relacionadas a estas áreas. Sin embargo, está demostrado a nivel internacional que el rendimiento de las jóvenes en ciencias, matemáticas y lectura son similares o mejores que los chicos (Stoet & Geary, 2018). Por tanto, hay más chicas capaces de cursar estudios STEM de nivel universitario que las que se matriculan y no existiendo diferencias de sexo en las materias STEM, se debe trabajar en las actitudes hacia la ciencia para disminuir la brecha en STEM.

Nos preguntamos entonces cómo llevar al aula la educación STEM desde un enfoque inclusivo. Por ello, en este trabajo veremos cómo seguir un enfoque de educación para la igualdad o enfoque co-educativo, de forma inclusiva. Seguiremos algunos estudios que destacan la importancia de revelar este tipo de conocimiento a los niños y las niñas a edades tempranas evitando la formación de estereotipos (Sullivan, 2021) así como enseñar habilidades STEM a personas con discapacidades cognitivas o con necesidades de aprendizaje específicas (González, 2021).

Educación STEM

El interés por ayudar al alumnado en el aprendizaje de las áreas STEM se remonta a la década de 1990, cuando la Fundación Nacional de la Ciencia (NSF) de EE.UU. incluyó formalmente la ingeniería y la tecnología con la ciencia y las matemáticas en la educación de grado y en la escuela K-12 (National Science Foundation, 1998). En los últimos años, la investigación en educación STEM se viene desarrollando fuertemente en países como

Estados Unidos, donde se originó la educación STEM y STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics), Australia, Canadá y Taiwán, viendo que el campo está creciendo en los diferentes continentes (Li et al., 2020). Sin embargo, aún no se ha llegado a un consenso sobre las disciplinas incluidas en STEM (Li et al., 2020).

Las investigaciones proponen integrar diferentes disciplinas STEM de manera diferente según su enfoque multidisciplinar, interdisciplinar o transdisciplinar (Vásquez, Sneider, & Comer, 2013). Así, podemos ver la propuesta de la Academia Nacional de Ciencias (2014) que indica que se necesita trabajar en contextos que impliquen fenómenos o situaciones complejas a través de tareas que requieran que el alumnado aplique conocimientos y habilidades de múltiples disciplinas, haciendo del contexto la columna vertebral de la educación STEM, mientras que Bryan, Moore, Johnson y Roehrig (2015) plantea tres caminos diferentes para la integración de contenidos STEM trabajando con unidades o actividades que a) desarrollen simultáneamente múltiples objetivos de aprendizaje de las diversas áreas de conocimiento STEM; b) abarquen contenidos de áreas distintas como apoyo al desarrollo de los objetivos de aprendizaje involucrados en el área principal a trabajar y c) partan de un contexto específico de un área de conocimiento para localizar los objetivos de aprendizaje de otras áreas (Martín-Páez et al., 2019).

Esta falta de consenso y las diversas formas de ver a la educación STEM complejizan la integración de la misma en el currículum escolar. Por ejemplo, desde una perspectiva amplia, podrías incluir la educación STEM en las disciplinas individuales (la educación científica, la educación tecnológica, la educación en ingeniería y la educación matemática) y en sus combinaciones interdisciplinares de forma transversal (Li et al., 2020). Para el desarrollo de esta nueva alfabetización es necesario que cada una de las disciplinas implicadas en STEM incluya una serie de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales esenciales de manera que, si bien es necesario el dominio de cada una de estas disciplinas STEM, también lo es la capacidad de reconocer y apreciar las conexiones que existen entre ellas (Martín-Páez et al., 2019). Según estos autores el aprendizaje STEM puede verse como la integración de una serie de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales a través de un conjunto de habilidades STEM para la aplicación de ideas o la resolución de problemas interdisciplinares en contextos reales. Para lograr este aprendizaje, la educación STEM debe tener estar reflejada en los currículums y planes de estudio STEM que permitan al alumnado crear experiencias que les permitan desarrollar las competencias asociadas a esta área, incluyendo el razonamiento lógico y la resolución de problemas. Entonces se ve que estas últimas competencias están íntimamente ligadas a la educación matemática.

A continuación, veremos cómo dentro de la educación STEM encontramos a la tecnología ligada con la educación matemática y la importancia de la enseñanza de la programación relacionada con las matemáticas.

Educación Matemática, Tecnología y Programación

La tecnología es una herramienta fundamental para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, mejorando el aprendizaje del alumnado, tal y como lo declara el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM). El NCTM propone seis principios sobre la educación matemática en la escuela: equidad, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; ésta influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el proceso de aprendizaje del alumnado. Existen numerosos recursos tecnológicos, desde las calculadoras, softwares educativos, herramientas de recolección, organización y análisis de datos, hasta las herramientas actuales de inteligencia artificial y *big data* que aumentan la capacidad de procesamiento de datos, realizar cálculos, facilitan la representación en gráficas, analíticas y visualización de datos. A través de estas ayudas tecnológicas el alumnado puede ampliar su conocimiento matemático, enfrentarse a nuevos retos e ideas, explorar nuevos contextos y, por tanto, mejorar la reflexión, razonamiento, planteamiento de problemas, solución de problemas y toma de decisiones.

Hoy, sin tecnología y sin matemáticas, no podríamos entender el mundo. En este sentido, el profesorado deberá formarse en cómo utilizar las tecnologías educativas e integrarlas en sus clases, así como los centros educativos deberían incluir y proveer al alumnado de los recursos tecnológicos, tales como calculadoras, software matemático, conexión a Internet.

Además, la programación se incluye actualmente en los planes de estudio de matemáticas en varios países (González-González, 2020), aunque menos del 1% de la población mundial sabe programar. Investigaciones recientes han mostrado que la inclusión de la programación en la educación matemática podría mejorar la motivación de los estudiantes para aprender matemáticas y mejorar el rendimiento de los estudiantes en matemáticas (Verbruggen, Depaepe & Torbeyns, 2021). Crear un programa de ordenador o programar, es crear una secuencia de instrucciones en un lenguaje de programación, que tienen reglas y estructuras. Las reglas de un lenguaje de programación no admiten ambigüedad en la interpretación y permiten expresar cualquier idea de tipo algorítmico, con lo que podemos relacionarla con las matemáticas, física, química, biología, o incluso el lenguaje. Por tanto, conocer un lenguaje de programación aporta numerosas ventajas al alumnado, tales como las de realizar cálculos, resolver problemas entendiendo y aplicando conocimientos básicos de diferentes disciplinas.

En este sentido, se ve cómo la educación STEM/STEAM es fundamental y será necesaria para ser competitivos en el futuro y debemos garantizar esta nueva alfabetización a todos los sectores de la población. A continuación, se presentará a modo de ejemplo, un proyecto de investigación, actualmente en desarrollo, plantea el desarrollo de esta alfabetización de forma inclusiva desde la educación infantil (González-González et al., 2021).

COEDU-IN

El proyecto "Alfabetización digital y STEAM en edades tempranas: propuesta co-educativa inclusiva (COEDU-IN)" tiene como principal objetivo analizar las iniciativas actuales y proponer un método co-educativo inclusivo de enseñanza de la programación y el pensamiento computacional en edades tempranas.

La etapa de educación inicial ofrece al profesorado la oportunidad de sentar las bases para una capacitación integral de calidad mediante el uso de herramientas innovadoras y el uso de tecnologías (Relkin, de Ruiter & Bers, 2021; Resnik, 2017). En este sentido, la robótica educativa en la educación infantil se convierte en una herramienta que facilita la adquisición de conocimiento a los niños y niñas de una manera lúdica, basada en los principios de interactividad, interrelaciones sociales, trabajo colaborativo, creatividad, aprendizaje constructivista y constructivista y el aprendizaje centrado en el estudiante, lo que les permite a su vez adquirir habilidades digitales y el desarrollo del pensamiento lógico y computacional (Wing, 2006; Bender, Urrea y Zapata- Ros, 2015; Román-González, 2016) de manera subyacente.

La base teórica de este proyecto se basa en dos teorías principales: el constructivismo de J. Piaget (1971) y el construccionismo de S. Papert (1980). La filosofía educativa de Papert comienza con el constructivismo de Piaget, pero agrega que la construcción de un nuevo aprendizaje es más eficiente cuando el estudiante lo elabora mediante objetos tangibles con alguna representación significativa para ellos: éste es el origen del método de "aprender haciendo" (o en inglés "learning by doing") (Papert, 1980). En consecuencia, los robots son una muy buena herramienta para explorar la filosofía construccionista porque permite aprender mediante la construcción, a través de la experiencia.

Por lo tanto, este proyecto contribuye en el estudio de cómo esta nueva alfabetización se está introduciendo en las escuelas (fundamentos pedagógicos, estrategias, herramientas, regulaciones), en particular utilizando las tecnologías tangibles en la educación infantil, para luego proponer un método educativo que permita incorporar la alfabetización STEM/STEAM de una manera co-educativa inclusiva. Por lo tanto, este proyecto aborda el análisis de las principales iniciativas llevadas a cabo en escuelas de infantil, el uso de herramientas específicas, como kits de robótica o entornos de programación educativa, y las principales estrategias de enseñanza-aprendizaje utilizadas en la educación infantil (3-6 años). Asimismo, se propone un método educativo para la enseñanza y el aprendizaje STEAM/STEAM, adaptado a los contextos locales (Canarias, España) y particulares (aulas hospitalarias) así como también para necesidades de aprendizaje específicas y especiales (síndrome de Down) (González-González, 2020).

Una revisión de la literatura 2003-2009 solicitó formas más innovadoras de vincular la alfabetización, la tecnología y el aprendizaje, ya que los textos digitales y la tecnología se entrelazan con las habilidades de alfabetización temprana (González-González, 2019). Por lo tanto, es necesario ver cómo abordar la enseñanza STEM/STEAM de una manera temprana e innovadora. Además, las investigaciones sobre cómo enseñar el pensamiento computacional a personas con discapacidades cognitivas o con necesidades de aprendizaje específicas aún son escasas.

Por tanto, ésta propuesta educativa contempla como principio de educación inclusiva, atendiendo a la diversidad del alumnado y adaptando la práctica educativa a las características personales, intereses y necesidades de niños y niñas. Así, se contribuye a su desarrollo integral de los niños y niñas, dada la importancia que en estas edades adquieren el ritmo y el proceso de maduración. Esta propuesta promueve, además, la utilización de estrategias metodológicas para favorecer la atención a la diversidad (tutoría entre iguales, coevaluación, aprendizaje cooperativo, etc.). Asimismo, incluye principios de igualdad de género, promoviendo en las actividades la reflexión sobre roles y estereotipos en la ingeniería, y la utilización de lenguaje no sexista.

Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un enfoque inclusivo de la enseñanza STEM/STEAM, incluyendo principios de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y de la programación. Se ha destacado la importancia de la educación inclusiva y la educación STEM/STEAM y se ha destacado la inmadurez y complejidad del área debido a sus diferentes enfoques (multidisciplinar, interdisciplinar o transdisciplinar). Asimismo, se ha puesto de manifiesto que no existe un consenso en cómo incorporar esta nueva alfabetización STEM/STEAM en el currículum escolar y que se pueden trabajar diferentes disciplinas de forma interconectada y transversal.

También se ha destacado la importancia de la educación matemática, su vertebración con la educación STEM/STEAM y cómo la tecnología es considerada como un recurso esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Otro aspecto a destacar dentro de la educación matemática y la tecnología es la propia enseñanza de la programación, que ha demostrado ser efectiva tanto para la motivación del alumnado, como para la mejora de las propias competencias relacionadas con matemáticas, en particular la resolución de problemas, razonamiento lógico y algorítmico, entre otras.

Finalmente, se ha presentado un proyecto de investigación que considera todos los principios anteriormente mencionados de inclusión y alfabetización STEM/STEAM, utilizando la robótica educativa como un poderoso recurso educativo y que se está aplicando a niños y niñas de educación infantil y adaptado a personas con necesidades educativas especiales (síndrome de Down) y en contextos inclusivos como las aulas hospitalarias. Este proyecto ha sido validado previamente con niños y niñas y sus educadores en diferentes centros educativos, así como en contextos especiales como aulas hospitalarias o con personas con síndrome de Down, mostrando resultados positivos en el aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Bender, W., Urrea, C., Zapata-Ros, M. (2015). "Pensamiento Computacional [Número monográfico]", *RED Revista de Educación a Distancia*, vol. 46, no. 1.

Bers, M. U., González-González C.S., Armas-Torres, M. B. (2019). "Coding as a playground: Promoting positive learning experiences in childhood classrooms", *Computers & Education*, vol. 138, pp. 130-145, 2019, [online] Available: https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.04.013.

Borba, M. C. (2021). The future of mathematics education since COVID-19: Humans-with-media or humans-with-non-living-things. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(1), 385-400.

Bryan, L. A., Moore, T. J., Johnson, C. C., & Roehrig, G. H. (2015). Integrated STEM education. *STEM road map: A framework for integrated STEM education*, 23-37.Consejo Estadounidense de Profesores de Matemáticas (NCTM) (2003) .*http://www.nctm.org/*

Forsström, S. E., & Kaufmann, O. T. (2018). A literature review exploring the use of programming in mathematics education.

González González, C. S. (2019). Estrategias para la enseñanza del pensamiento computacional y uso efectivo de tecnologías en educación infantil: una propuesta inclusiva. *Revista Interuniversitaria De Investigación En Tecnología Educativa*, no. 7, 2019, [online] Available: https://doi.org/10.6018/riite.405171.

González González, C. S. (2020). Pensamiento computacional y robótica en educación infantil: una propuesta metodológica inclusiva. Tesis doctoral.

González González, C. S., Herrera González, E., Moreno Ruiz, L., Reyes Alonso, N., Hernández Morales, S., Guzmán Franco, M. et al. (2019). Computational Thinking and Down Syndrome: An Exploratory Study Using the KIBO Robot. Informatics, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, vol. 6, no. 2, pp. 25, June 2019, [online] Available: https://doi.org/10.3390/informatics6020025.

González González, C.S., Guzmán Franco, M., Infante Moro, A. (2019). Tangible Technologies for Childhood Education: A Systematic Review. Sustainability, vol. 11, no. 10, 2019, [online] Available: https://doi.org/10.3390/su11102910.

González-González, C. S., Caballero-Gil, P., García-Holgado, A., García-Peñalvo, F. J., Molina, J., del Castillo-Olivares, J. M., ... & Ramos, S. (2021, September). COEDU-IN Project: an inclusive co-educational project for teaching computational thinking and digital skills at early ages. In *2021 International Symposium on Computers in Education (SIIE)* (pp. 1-4). IEEE.

Lee, I., Grover, S., Martin, F., Pillai, S., & Malyn-Smith, J. (2020). Computational thinking from a disciplinary perspective: Integrating computational thinking in K-12 science, technology, engineering, and mathematics education. *Journal of Science Education and Technology*, *29*(1), 1-8.

Li, Y., Wang, K., Xiao, Y., & Froyd, J. E. (2020). Research and trends in STEM education: A systematic review of journal publications. *International Journal of STEM Education*, *7*(1), 1-16.

Margot, K. C., & Kettler, T. (2019). Teachers' perception of STEM integration and education: a systematic literature review. *International Journal of STEM education*, *6*(1), 1-16.

Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales-Palacios, F. J., & Vílchez-González, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, *103*(4), 799-822.

Papert, S. (1980). Mindstorms: Children computers and powerful ideas, Basic Books, Inc.

Perienen, A. (2020). Frameworks for ICT integration in mathematics education-A teacher's perspective. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(6), em1845.

Piaget, J. (1971). Psychology and Epistemology: Towards a Theory of Knowledge, New York:Grossman, 1971.

Relkin, E., de Ruiter, L. E., & Bers, M. U. (2021). Learning to code and the acquisition of computational thinking by young children. *Computers & Education*, *169*, 104222.

Resnick M. (2017). Lifelong Kindergarten: Cultivating Creativity Through Projects Passion Peers and Play, MIT Press.

Román-González, M. (2016). "Codigoalfabetización y pensamiento computacional en educación primaria y secundaria: validación de un instrumento y evaluación de programas", *Tesis doctoral*.

Stoet, G., & Geary, D. C. (2018). The gender-equality paradox in science, technology, engineering, and mathematics education. *Psychological science*, *29*(4), 581-593.

Sullivan, A. (2021). Supporting Girls' Computational Thinking Skillsets: Why Early Exposure Is Critical to Success. In *Teaching Computational Thinking and Coding to Young Children* (pp. 216-235). IGI Global.

Vasquez, J. A., Sneider, C. I., & Comer, M. W. (2013). *STEM lesson essentials, grades 3-8: Integrating science, technology, engineering, and mathematics* (pp. 58-76). Portsmouth, NH: Heinemann.

Verbruggen, S., Depaepe, F., & Torbeyns, J. (2021). Effectiveness of educational technology in early mathematics education: A systematic literature review. *International Journal of Child-Computer Interaction*, *27*, 100220.

Wing,J. (2006). "Computational Thinking", Communications of the ACM, vol. 49, no. 3, pp. 33-35, 2006.

PERSPECTIVAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN POST-PANDEMIA: PUNTOS DE PARTIDA Y DESAFÍOS

Mabel RODRÍGUEZ
Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
mrodri@campus.ungs.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presenta un recorrido, parcial y personal, por el devenir de la enseñanza de la matemática en tiempos de pandemia. Se propone una mirada desde de la Educación Matemática a las prácticas educativas que tuvieron lugar a lo largo de los últimos dos años. A partir de allí, y en función de aportes de investigadores del campo, se da lugar a plantear ciertos cuestionamientos y líneas de trabajo a futuro.

Palabras clave: Enseñanza de la Matemática en Pandemia – Enseñanza de la Matemática Post-Pandemia – Desafíos de la Educación Matemática.

Introducción

La pandemia provocada por el CoViD-19 causó estragos a nivel mundial en todos los órdenes. La enseñanza y el aprendizaje de la matemática no quedaron fuera de su alcance. Sin embargo, como suele ocurrir en las crisis, hay contracaras. La necesidad de resolver situaciones de distinta naturaleza, provoca avances. En nuestro caso, esto se dio, en primera instancia, al buscar estrategias que permitieran abordar la enseñanza en múltiples y extremadamente diversos contextos, niveles y situaciones de aprendizaje. Docentes, estudiantes e investigadores atravesamos por distintas etapas desde que comenzó el aislamiento. En el inicio, tuvimos la convicción de que en pocos días se volvería a las aulas, luego la certeza de que el año 2020 terminaría sin el regreso a la presencialidad; ya en 2021 el retorno progresivo a clases, hasta hoy en día que en muchas instituciones se alcanzó la presencialidad y aforos plenos. En cada etapa, las condiciones que configuraron los contextos de docentes y estudiantes, fueron cambiando. En el inicio de la pandemia, el punto de partida de muchos profesores fue un desconocimiento integral sobre cómo afrontar la enseñanza de la matemática sin presencialidad, sin dispositivos adecuados, sin conectividad y con condiciones familiares no siempre favorables. Pero también hubo docentes con recursos y contexto a favor, pero sin saber cómo aprovecharlos adecuadamente. Desde los estudiantes, la situación fue mayoritariamente endeble en cada uno de los aspectos mencionados. En los últimos tiempos, con la mayoría de las instituciones en presencialidad plena, muchos docentes y estudiantes elegirían la virtualidad o, al menos, quisieran no perder algunos recursos que encontraron virtuosos.

La Educación Matemática estuvo presente y acompañó el devenir de los procesos de enseñanza y de aprendizaje a lo largo de todo este tiempo, de distintas maneras. La intención en este trabajo es ofrecer una mirada particular sobre ellas, de modo de abrir una discusión entre colegas, sin pretender considerar que es única ni mucho menos exhaustiva.

Desarrollo

La salida abrupta de las aulas, con la necesidad de continuar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, pusieron en el centro de la atención a las nuevas tecnologías de la información y comunicación (TIC) como único recurso que posibilitó a directivos, docentes, estudiantes y familias estar conectados. Sin esto resuelto, no habría enseñanza posible. Ahora bien, una vez lograda esa comunicación entre estudiantes y docentes, cómo diseñar y gestionar la enseñanza de la matemática utilizando la vía de comunicación a la que se tuviera alcance, fue una cuestión que mayoritariamente no estaba resuelta. Gran parte de docentes y directivos se encontraron ante una situación nueva, sin conocimientos ni herramientas para afrontarla adecuadamente. Esto generó que, en los primeros tiempos, se desplegaran una serie de respuestas ad hoc, improvisadas, sin sustento teórico pero que, de algún modo, permitieron estar en contacto con los estudiantes. Este último, sin dudas, fue un propósito central, inicialmente. Sin embargo, mucho antes de la pandemia, la Educación Matemática venía investigando la incorporación de las TIC a la enseñanza de la matemática, desde distintas perspectivas. Se debatía su rol y potencial para generar cambios en los modos de enseñar y aprender matemática, a la vez que se escuchaban argumentos para resistirse a ellos; se planteaban discusiones respecto de la formación inicial de profesores de modo que, con un uso pertinente, los estudiantes aprendan matemática; se estudiaban puntualmente formas de abordar la enseñanza de contenidos específicos, modelización, resolución de problemas utilizando software, etc. Solo a modo de ejemplo, se mencionan autores que contribuyeron en cada una de estas perspectivas: Borba et al. (2016), Barreiro (2015), Villarreal et al. (2010), respectivamente. En la mayoría de los casos, todo el bagaje de conocimientos disponibles respecto del uso de las TIC, la enseñanza virtual, híbrida, etc. no pudo ser utilizado. Así como la crisis abrió una posibilidad para incorporar cambios, la necesaria inmediatez no dio lugar a acceder a estudios ni a adaptarlos a cada contexto particular. El acomodamiento fue abrupto, sin respaldo y para nada responde a cómo la comunidad de Educación Matemática podría haber imaginado esta transición. Esto ha provocado en la comunidad educativa una profunda preocupación respecto a la urgente adopción de las TIC, llevando a que las propuestas de enseñanza cayeran nuevamente en modalidades tradicionales, centradas en la transmisión de conocimiento (Bakker & Wagner 2020). Algunas de las manifestaciones en este sentido son las siguientes.

- En los encuentros sincrónicos se encontraron diversos rasgos que permiten asociar las clases con el modelo tradicional de enseñanza. Mencionamos, por ejemplo:
    - Fue predominante la errónea equivalencia entre “tener clases” y “tener encuentros sincrónicos”. Esto provocó que propuestas íntegramente asincrónicas fueran vistas como estar *sin clases*,

mientras que se consideró "tener clases" a los encuentros sincrónicos, más allá de las propuestas para el trabajo en ellos.

    - Fueron utilizados para explicar contenidos y dar ejemplos, con un rol pasivo de estudiantes
    - Se encontraron estudiantes conectados, sin cámara, que abandonaban la clase y profesores que experimentaban distintas formas de "pasar lista" para garantizar su presencia
    - Fueron usuales los pedidos de grabación para que quien faltó, pudiera "ver la clase"

- generación de ejemplos resueltos para los estudiantes (en pdf o videos) y asignación de actividades para replicar el tipo de resolución
- adquisición de dispositivos que cumplieran el rol del pizarrón (pizarrones de fibra, tabletas gráficas) para poder escribir al *explicar*
- evaluaciones estructuradas y preocupación por evitar la copia entre estudiantes
- uso de dispositivos para controlar a los estudiantes durante exámenes (cámaras que muestren su entorno, software que detectan que se cambia de pantalla en la computadora, etc.)

Lo controversial de este punto es que, muchos docentes que han tenido este retroceso al conductismo, están convencidos de lo contrario. Se consideran expertos en la enseñanza de la matemática en entornos digitales. Así, se han encontrado una cantidad considerable de experiencias y materiales compartidos que no solo no tienen el respaldo de investigaciones que permitan sostener la calidad de las propuestas, sino que, no pasarían airosos un análisis de su pertinencia, desde alguna de las perspectivas vigentes de la Educación Matemática. Esta tergiversación se encuentra, sobre todo, en docentes ajenos al campo. Probablemente surja de su desconocimiento –en resultados y metodologías–, sumado a la creencia de que, *haber resuelto cómo dar clase* en tiempos de pandemia –más allá de cómo haya sido esa clase– los hace expertos en la enseñanza virtual.

La Educación Matemática se vio interpelada durante la pandemia y lo es hoy en día para pensar de qué modo continuar, con qué preguntas, líneas de investigación y modos de comunicación de sus resultados.

En este tiempo, se contó con aportes con especialistas de todo el mundo, exponiendo ideas en vivo en webinars, revistas especializadas destinaron números enteros a compartir perspectivas, y se vio una fluida y constante actividad en redes sociales y comunidades de docentes. Asimismo, surgieron inmediatamente investigaciones que abordaron distintos cuestionamientos. Varios de ellos, destinaron esfuerzos a estudiar condiciones de docentes de distintas regiones geográficas y conocimientos disponibles para afrontar la enseñanza de la matemática con TIC. Entre otros, y solo a modo de ejemplo, Silva (2021) y Zacarias Flores & Salgado Suárez (2020).

Ahora bien, ¿cómo seguir en la post-pandemia? Bakker et al. (2021) han identificado ocho líneas para abordar investigaciones en los tiempos que vienen. Estos son: enfoques de enseñanza; metas de la educación matemática; relación entre la educación matemática y otras prácticas; desarrollo profesional de profesores; equidad, diversidad e inclusión; afecto y evaluación. Al respecto, Oates (2021) señala la naturaleza diferente de la última línea agregando que ha tenido un foco primordial y que fue el centro de discusiones y numerosos aportes en artículos específicos en estos últimos tiempos.

Bakker et al. (2021) resaltan que en alguna medida la investigación en Educación Matemática no ha sido accesible o no ha dado respuestas a docentes en el pasado, señalando que con el devenir de la pandemia la deuda se manifestó aún mayor. Aparece con énfasis la necesidad de pensar en formas de transmitir ideas clave y resultados de investigaciones de forma que resulten accesibles y estén disponibles a tiempo para la comunidad de docentes.

Sin dudas la pandemia dejó en evidencia disparidades en el acceso a conectividad, dispositivos, etc. pero por sobre todo esto se advirtió en el alcance de la Educación Matemática para dar soporte a los docentes del sistema educativo. Las preguntas o problemas que se venían desarrollando probablemente cambien de ahora en adelante. Al respecto, Oates (2021) sintetiza preguntas de diversos autores, producto de las vivencias de los últimos dos años. Menciona, por ejemplo, la necesidad de pesar de qué modo se usan las TIC para desarrollar contenido matemático en los primeros niveles de la escolaridad. Surgen preguntas respecto de la evaluación, de cómo pensar la clase invertida o el trabajo en modalidades híbridas. Preguntas al interior de la propia Educación Matemática, respecto de los cambios que esta sufrirá serían, a su vez, cuestiones de interés. Centran, también, el interés en estudiar con rigor académico las prácticas que la pandemia demandó y de qué modo –si es apropiado y factible- adaptarlas a distintos contextos. Se hace necesario trascender las impresiones de que lo hecho funcionó, a comprender por qué, bajo qué condiciones, con qué sustento teórico se plantea esa afirmación. Estudios longitudinales también abren un posible camino a seguir para develar cómo continúan sus estudios los estudiantes que recibieron clases en tiempos de la pandemia.

Finalmente, también como cuestión a destacar y atender, se resalta la necesidad del trabajo colectivo y conjunto entre docentes e investigadores. El distanciamiento social favoreció, paradójicamente, el acercamiento entre colegas, las consultas, reuniones y discusiones. Tras el cimbronazo inicial, la sensación de estar aislado no se interpretó como estar en soledad. De algún modo hubo acompañamientos y respaldo, pero de un modo asistemático. En la mayoría de los casos estos se iniciaron por vínculos preexistentes entre las personas.

Entre los desafíos señalados y posibles líneas para seguir trabajando, personalmente me resulta importante sumar una más, en pos de la autonomía docente. Podría enmarcarse en formación de profesores, tanto inicial como continua. Entiendo que abordar el fortalecimiento a docentes de modo de disponer herramientas que les permitan analizar sus propias prácticas, con sustento académico les permitiría reconocer eventuales disparidades entre lo que discursivamente manifiestan sobre su trabajo y lo que, efectivamente, llevan adelante en sus propuestas.

Por último, y no menor, queremos resaltar que, en todo este tiempo, la matemática salió a la luz para la sociedad, quedó visibilizada y su imprescindibilidad quedó de manifiesto. Se vio a nivel mundial la necesidad de saber matemática, resultó evidente su potencial para modelizar, explicar y predecir sucesos, para organizar datos, interpretarlos estadísticamente, derribar noticias falsas, entre otros. Como docentes, podemos capitalizar esta *buena prensa* para nuestras clases.

Sin dudas, y en consonancia con lo que ocurre en otras áreas, la Educación Matemática está interpelada a producir nuevos conocimientos para fortalecer la enseñanza y los aprendizajes mediante investigaciones que contemplen un modo de comunicar sus resultados para que, fehacientemente, sus aportes puedan estar disponibles para la comunidad de docentes, en la medida en la que se requieran.

Referencias Bibliográficas

Bakker, A., & Wagner, D. (2020). Pandemic: lessons for today and tomorrow? *Educational Studies in Mathematics*, *104*, 1–4.

Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(1), 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Barreiro, P. (2015). *Fases de integración de nuevas tecnologías en la formación de profesores de Matemática*. [Tesis de Maestría], Universidad Nacional del Comahue.

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., & Sánchez Aguilar, M. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 589-610.

Engelbrecht, J., Borba, M. C., Llinares, S., & Kaiser, G. (2020). Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? *ZDM*, *52*(5), 821–824. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01185-3

Oates, G. (2021). Life in the time of COVID: Thoughts on current trends and future directions in mathematics education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*(71), i-xi. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71e01

Silva, R. M. D., Marinho De Albuquerque, R., & Ignácio, R. (2021). Análise do sistema de recursos de um professor de Matemática no ensino remoto. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *23*(3), 185–216. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p185-216

Villarreal, M., & Mina, M. (2020). Actividades experimentales con tecnologías en escenarios de modelización matemática, *Bolema*, *34*(*67*), 786-824.

Villarreal, M., Esteley, C. & Mina, M. (2010). Interplay between modeling and information and communication technologies. *The International Journal of Mathematics Education*, *42*, 405-419.

Zacarias Flores, J. D. & Salgado Suárez, G.D (2020). Estudio de la preparación del profesorado en México ante la pandemia del COVID-19 en la transición de enseñanza presencial a virtual o en línea, *Revista Paradigma (Extra 2), XLI*, 795 – 819.

HABILIDADES MATEMÁTICAS EN LA POST-PANDEMIA

Adriana FAVIERI
Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas
Universidad Nacional de La Matanza
Argentina
afavieri@unlam.edu.ar

Resumen

La pandemia de CoViD-19 ha provocado consecuencias educativas, tanto en clases generales como las de matemáticas, relacionadas con un predominio de clases tradicionales en donde el docente es poseedor del conocimiento matemático y su tarea es transmitirlo a los alumnos, quienes lo adquirirán a través de sus indicaciones. Desde una postura constructivista, el conocimiento se desarrolla en base a las diferentes construcciones del alumno y este es parte activa del proceso de aprendizaje. Dentro de esta corriente se ha planteado el aprendizaje autónomo, proceso en el cual el alumno autorregula su aprendizaje y toma conciencia de sus propios procesos cognitivos. Esta toma de conciencia se llama metacognición y puede desarrollarse mediante experiencias de aprendizaje que fomenten, por ejemplo, el desarrollo de habilidades matemáticas. De allí que en esta presentación hablaremos sobre las habilidades matemáticas, su definición y características y plantearemos algunas consideraciones sobre su enseñanza y la toma de conciencia de ellas.

Palabras clave: Habilidades matemáticas – Postpandemia – Toma de Conciencia – Metacognición.

Consecuencias Educativas de la Pandemia

Prácticamente ningún integrante de la comunidad educativa estaba preparado para enseñar o aprender en forma remota. A pesar de que ya existían propuestas de enseñanza íntegramente virtuales, esto no ocurría para la mayoría de los niveles educativos. El Centro de Implementación de Políticas Públicas para la Equidad y el Crecimiento (CIPPEC) realizó un estudio sobre las acciones llevadas a cabo tanto por el gobierno nacional argentino como los provinciales frente la suspensión de clases por la pandemia CoViD-19 para la escuela primaria y media (Cardini et al., 2020). Las agruparon en cinco categorías:

- Acciones para que los alumnos puedan seguir accediendo a contenidos pedagógicos a través de tecnologías digitales, televisión, radio y la distribución de materiales impresos.
- Ejecuciones vinculadas con la ampliación de infraestructura digital y así poder acceder a dichos contenidos.
- Capacitaciones docentes en el uso pedagógico de las tecnologías digitales.
- Modificaciones en la organización escolar para garantizar la continuidad pedagógica en un ciclo escolar irregular.
- Ampliación del servicio de alimentación escolar y el acompañamiento a las familias (Cardini, et al, 2020.).

Desde las universidades argentinas se han implementado una variedad de respuestas para el dictado de clases virtuales. Las formas y plataformas utilizadas dependieron de las condiciones de cada institución (Consejo Interuniversitario Nacional, 2020). Se desarrollaron materiales digitales imprimibles, videos y actividades con las herramientas disponibles en cada plataforma educativa utilizada. También se difundieron contenidos a través de los canales de televisión del Programa Seguimos Educando, de la TV Pública, Canal Encuentro, Paka Paka y DeporTV (Ministerio de Educación de Argentina, 2020). Lo que se dio a conocer en distintos ámbitos educativos, fueron mayoritariamente materiales digitales imprimibles y videos con el fin de superar la emergencia inicial. En general, inicialmente el estilo de clases que predominó fue de tipo tradicional, a pesar de que con el correr del tiempo y la experiencia adquirida, los profesores experimentaron opciones diferentes. Estas formas de trabajo también invadieron la enseñanza de la matemática. El estilo tradicional promueve la memorización y repetición, por ejemplo, con predominio de aplicación de fórmulas. De este modo, no se da lugar a la comprensión de conceptos, actividades de modelización o resolución de problemas cuestiones que, hoy en día la comunidad de Educación Matemática promueve. Hay, en cambio, una marcada presencia de ejercicios rutinarios que no están bien adaptados a los distintos niveles de habilidades matemáticas que se podrían promover en del aula (Ortiz et al., 2020). Asimismo, el estudiante en este tipo de propuestas no logra autonomía, y depende de las indicaciones del docente. Espera la explicación de temas, resolución de ejemplos modélicos con la indicación de procedimientos a utilizar y, al final de su trabajo, requiere la validación externa de sus resultados. La organización para el Liderazgo en Educación Matemática (NCSM, por sus siglas en inglés) y el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) sostienen que, durante la pandemia COVID-19 se ha hecho evidente la urgencia de cambiar la manera en que enseñamos matemática (NCTM y NCSM, 2020). Esto nos lleva a pensar que una de las posibles formas es el desarrollo del aprendizaje autónomo.

Autonomía y Metacognición

Las clases tradicionales, que brevemente describimos en el apartado anterior siguen lo que Charnay (1994) denominó el modelo normativo, con el foco puesto en el contenido, el cual se considera acabado, ya construido. Sin embargo, desde una postura constructivista el conocimiento se desarrolla en base a las diferentes construcciones del alumno acordes a esquemas mentales previos y este es parte activa del proceso de aprendizaje. Dentro de esta postura se ha planteado el aprendizaje autónomo por Halliday (1979) y, desde la teoría de la actividad histórico cultural, por Leontiev (1978) y Vygostky (1979). El aprendizaje autónomo se desarrolla mediante un proceso en el cual el alumno autorregula su aprendizaje y toma conciencia de sus propios procesos cognitivos. Esta toma de conciencia se llama *metacognición*. La tarea docente podría estar encaminada hacia la formación de alumnos capaces de conocer aspectos de su propio aprendizaje, y no restringirse a repetir procedimientos o aprender definiciones. Pero, para que esto ocurra, el docente orienta a que se cuestione, revise, planifique, controle y evalúe su propia acción de aprendizaje (Martínez et al., 2005). La toma de conciencia de las habilidades del pensamiento, de los propios procesos del pensar y aprender, implica la posibilidad de conocerlos para mejorarlos o cambiarlos (Roman y Diez, 1998). Esto ayuda a enfrentar demandas sociales, académicas, profesionales y productivas con mayor soltura, buscar soluciones a los problemas que se presenten. El pensamiento implica procesos mentales por medio de los cuales se comprende, reflexiona, analiza, argumenta, se crean y recrean realidades, se construyen y reconstruyen significados (Velázquez Burgos et al., 2013). Mejorar los niveles de pensamiento de los estudiantes, mediante la educación implica dejar relegada la mirada enciclopédica, descontextualizada de la realidad, deshumanizada, centrada principalmente en el aprendizaje acumulativo de conocimientos teóricos. Requiere, en cambio, emprender senderos en los cuales se armonicen los contenidos teóricos con habilidades matemáticas y actitudes que contribuyan a desarrollar el pensamiento matemático.

El concepto de metacognición fue introducido por Flavell (1976), discípulo de Piaget. La metacognición hace referencia al conocimiento, control y a la toma de conciencia de los procesos de aprendizaje. El aprendizaje metacognitivo puede ser desarrollado, pero requiere experiencias de aprendizaje adecuadas (Burón, 2020; Organista Díaz, 2005). Las actividades metacognitivas son mecanismos autorregulatorios que utilizamos al intentar resolver problemas (Velázquez Burgos et al., 2013). Mateos (2001) sostiene que se desarrolla el conocimiento metacognitivo de un estudiante cuando este logra saber cuándo, dónde y cómo utilizar una técnica, revisar teoría, aplicar un resultado, adaptar un resultado para utilizarlo, etc. Esto puede desarrollarse mediante experiencias de aprendizaje que fomenten el desarrollo de habilidades matemáticas.

Habilidades Matemáticas

Las habilidades matemáticas han sido definidas y estudiadas por autores como Ferrer Vicente (2010), García Bello (2010), Morales-Díaz et al., (2013). En esta oportunidad vamos a basarnos en la definición aportada por Rodríguez (2016). Consideramos que una habilidad matemática es un desempeño, una acción, apropiadamente realizado para resolver correctamente alguna problemática matemática planteada. Esta acción es deliberada, pues el ejecutante tiene el control sobre ella. Es decir, antes de actuar piensa y toma decisiones. Este aspecto es clave para nuestras propuestas de actividades en el aula, dado que, como docentes, debemos asegurarnos de que las acciones de los estudiantes sean intencionales. Concuerda con Delgado Rubí (1997) en la caracterización de las habilidades, que implica que:

- Sean propias del quehacer matemático
- Sean generales para estar presentes en distintos niveles de escolaridad
- Sean imprescindibles para la formación matemática

Además, las habilidades matemáticas están vinculadas a los contenidos (Falsetti et al., 2009; Rodríguez, 2016; García Bello, 2010).

Consideraciones para la Enseñanza

Si queremos desarrollar alumnos autónomos, que tengan conciencia de las habilidades matemáticas, de cuándo, cómo y por qué usarlas, más una actitud crítica sobre dicho proceso, tendríamos que dejar de planificar la enseñanza desde un enfoque tradicional.

Podríamos cambiar nuestro punto de vista y pensar, en primer lugar, qué habilidades matemáticas queremos enseñar y luego, cuáles son los contenidos sobre los que las particularizaremos. Vale decir que podríamos planificar la enseñanza de modo que un mismo contenido contribuya a desarrollar distintas habilidades matemáticas. La idea es dotar al alumno con recursos para conocerse a sí mismo, sus características como aprendiz y sus posibilidades de desarrollo autónomo. En consecuencia, podríamos emplear metodologías activas, en las cuales el centro está puesto en la actividad del alumno, favoreciendo debates, la explicación de contenidos entre compañeros, la autoevaluación y coevaluación, Pedir a los alumnos anticipaciones, promover que piensen y tomen decisiones antes de actuar y las comuniquen, es un requerimiento para que podamos hacer un seguimiento de la intencionalidad de sus acciones. Asimismo, deberemos promover momentos de introspección posteriores a las resoluciones, con preguntas orientadas a la reflexión, al compartir ideas. El favorecer que expliquen los procesos por los que llegaron a la solución de un problema o planteamiento matemático, explicitar las decisiones que tomaron, etc. son vías para intentar hacer conscientes los procesos vinculados al desarrollo de habilidades matemáticas. Estos momentos de reflexión metacognitiva son esenciales para la toma de consciencia de las habilidades matemáticas a posteriori, y las instancias a priori permiten ir trabajando la conciencia sobre la importancia de la toma de decisiones. Acorde con esta postura, es necesario contemplar formas de evaluación diferentes que también recaben información sobre estos aspectos metacognitivos.

Algunas ideas de preguntas orientadas a la toma de conciencia

A fin de promover la conciencia sobre lo que el estudiante se propone hacer, previo a actuar, podrían presentarse preguntas como las siguientes:

- ¿Podrías contarme qué piensas hacer y por qué?
- ¿Tenés algún plan para comenzar a resolver?
- ¿Tenés más de un camino posible que pudieras probar?, ¿Cómo elegirías con cuál empezar?

Y, al finalizar la tarea, las vinculadas con la reflexión posterior:

- ¿Qué aprendiste hoy?
- ¿A qué aspectos les prestaste atención?
- ¿Qué observaste que te permitió hacer una propuesta de resolución?
- ¿Pudiste establecer relaciones con lo estudiado previamente?
- ¿Identificas algo que te haya resultado difícil?
- ¿Tuviste dificultades con algún aspecto en particular, procedimiento o concepto?
- ¿Adviertes qué conceptos, procedimientos y/o propiedades usaste durante las actividades de clase?
- ¿Consideras que hay algunos aspectos que tengas que practicar más; prestarle más atención?

En todos los casos, estas deberían plantearse con la consigna expresa para ser respondidas antes de comenzar las resoluciones y al finalizar. La idea es que los alumnos traten de tomar consciencia de las acciones realizadas, no que las recuerden de memoria, sino ayudarlos a observar las formas de trabajo en matemática y ser consciente de las habilidades matemáticas.

Reflexiones Finales

Creemos que como docentes tenemos la meta de enseñar favoreciendo la autonomía, la autorregulación y la toma de consciencia de los procesos mentales, de las habilidades matemáticas y las actitudes que contribuyan a desarrollar el pensamiento matemático. Ayudar a los alumnos a ser conscientes de cómo aprenden, qué decisiones toman, cómo y cuándo utilizan las habilidades matemáticas no es tarea sencilla, ni un objetivo a lograr en corto plazo. Es sabido, con los posicionamientos actuales sobre habilidades, que su desarrollo no se logra de manera acabada nunca. Por lo tanto, tendríamos que considerar incluir en más de un curso académico, aquellas que nos resulten imprescindibles para la formación de los estudiantes. Asimismo, si planificamos pensando en este fin estaríamos contribuyendo a la formación de alumnos críticos, capaces de enfrentar las demandas sociales, académicas, profesionales y productivas con mayor soltura, y con un bagaje de recursos para buscar soluciones a los problemas que se les presenten.

Referencias Bibliográficas

Burón, J. (2020). *Enseñar a aprender: introducción a la metacognición* (6ta ed.). Ediciones Mensajero.

Cardini, A., D'Alessandre, V., & Torre, E. (2020). *Educar en tiempos de pandemia. Respuestas provinciales al COVID-19 en Argentina.* Buenos Aires: CIPPEC. https://www.cippec.org/publicacion/educar-en-pandemia-respuestas-provinciales-al-covid/

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra, C. & I. Saiz (Eds.). *Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones* (pp. 51–63). Paidos.

Las universidades argentinas frente a la pandemia del COVID 19. (2020, 8 abril). CIN. Recuperado 10 de marzo de 2021, de https://www.cin.edu.ar/las-universidades-argentinas-frente-a-la-pandemia-del-covid-19/

Delgado Rubí, J. (1997). Las habilidades matemáticas, Documento interno de trabajo. Seminario-taller de Didáctica de la Matemática, UTN Regional Haedo. Argentina.

Falsetti M., Favieri A., Scorzo R., & Williner B. (2009). Estudio sobre habilidades matemáticas para el cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería. *Actas del 10mo Simposio de Educación Matemática*, 303-321.

Ferrer Vicente, M. (2010). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana.* [Tesis de Doctorado]. Universidad de Ciencias Pedagógicas "Frank País García", Cuba.

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick, L. *The nature of intelligence* (pp. 231-235). Lawrence Erlbaum.

García Bello, B. L. (2010, 9 abril). *El proceso de formación de habilidades matemáticas*. Monografias.com. Recuperado 1 de marzo de 2021, de https://www.monografias.com/trabajos81/proceso-formacion-habilidades-matematicas/proceso-formacion-habilidades-matematicas

Gobierno Vasco. (2015). *Competencia matemática*. http://ediagnostikoak.net/edweb/cas/item-liberados/ED09_Euskadi_Matem_EP4.pdf

Halliday, M. (1979). *Language as social semiotic*. Edward Arnold.

Kuhfeld, M., & Tarasawa, B. (2020). *The COVID-19 slide: What summer learning loss can tell us about the potential impact of school closures on student academic achievement*. NWEA.

Leontiev, A. (1978). *Activity, consciousness and personality*. Prentice Hall.

Martínez, M., Buxarrais, M., & Esteban, F. (2002). La universidad como espacio de aprendizaje ético. *Revista Iberoamericana de Educación, 29*, 17-42.

Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Aique.

Universidades en tiempo de Coronavirus: clases virtuales y colaciones. (2020, 1 abril). Argentina.gob.ar. Recuperado 1 de marzo de 2021, de https://www.argentina.gob.ar/noticias/universidades-en-tiempo-de-coronavirus-clases-virtuales-y-colaciones-por-streaming

Morales-Díaz, Y., Bravo-Estévez, M., y Cañedo-Iglesias, C. (2013). Enseñanza de la matemática en ingeniería mecánica para el desarrollo de habilidades. *Pedagogía Universitaria, 18*(4), 75-90.

Organista Díaz, P. (2005). Conciencia y metacognición. *Avances en Psicología Latinoamericana, 23*, 77-89.

Rodríguez, M. (2016). Habilidades matemáticas: una aproximación teórica. *Educación Matemática Pesquisa, 18*(2), 809-824.

Roman, M y Diez, E. (1998). *El diseño curricular de aula: sus elementos fundamentales*. Novedades Educativas.

Velázquez Burgos, B., Remolina de Cleves, N. y Calle Márquez, M. (2013). Habilidades de pensamiento como estrategia de aprendizaje para los estudiantes universitarios. *Revista de Investigaciones UNAD, 12*(2), 23-41.

Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica.

FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: DESAFÍOS DURANTE Y POST-PANDEMIA

Luis R. PINO-FAN
Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl

Resumen

A lo largo de la historia de la educación matemática, las agendas de investigación han sufrido diversos "giros", en función de los contextos, demandas y necesidades sociales. La pandemia por CoViD-19 vivida recientemente, sin duda marcará un antes y un después en el estándar al que nos encontrábamos habituados para el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En particular, en esta conferencia nos interesamos por la formación de los profesores de matemáticas, ¿qué desafíos enfrentamos como profesores de matemáticas durante la pandemia? ¿cómo la comunidad de investigación en Didáctica de la Matemática podría contribuir en materia de formación de profesores de cara al futuro? En esta conferencia se muestran los principales desafíos en materia de formación de profesores de matemáticas, derivados del impacto de la Pandemia, y como éstos podrían ser considerados como oportunidades de investigación y desarrollo, generando una posible agenda de investigación.

Palabras clave: Formación de Profesores de Matemáticas - Agenda de Investigación.

Introducción

La pandemia y su disrupción de la dinámica social, incluida la escolar, plantea una revisión tanto de las propuestas de acción escolar frente a situaciones de confinamiento, como a la investigación que se debe desarrollar para dar cuenta de situaciones educativas de excepción. Es probable que esta pandemia sea solo una primera circunstancia que pone de manifiesto la necesidad de indagar con más determinación en ámbitos de acción escolar que no han sido considerados con anterioridad o que han sido "relegados" durante tiempos pre-pandemia.

Los países de América Latina, al igual que la mayoría de los países del mundo, preocupados tanto por la contingencia sanitaria que implica esta pandemia, como por el impacto que tendrán sus economías, implementaron medidas de contención, por ejemplo: a) *establecer períodos de cuarentena*, voluntaria u obligatoria, para evitar la propagación acelerada del virus y no saturar los hospitales; b) *cierre de fronteras*, totales y parciales; c) *cierre de escuelas en todos los niveles educativos*; d) *medidas de apoyo para el sector salud*, para comprar equipo médico, aumentar la capacidad de realizar pruebas para detectar casos de Covid-19, etc.; e) *medidas de apoyo fiscales*, tanto para empresas como para los ciudadanos; f) *cancelación de eventos masivos y cierre de lugares públicos*.

Con respecto al punto c), en la mayoría de los países de América Latina cerraron las escuelas en todo el país, como es el caso de México, Chile y Colombia. Según cifras de la UNESCO, hasta principios de 2021 se habían afectado en México a 37,589,611 estudiantes de todos los niveles educativos, mientras que en Chile y en Colombia a 4,981,092 y 12,842,289 respectivamente. El cierre de las escuelas en Latinoamérica, y en particular en Chile, Colombia y México, ha llevado a los gobiernos, y sus Ministerios de Educación, a buscar medidas alternativas para que los estudiantes afectados puedan continuar sus estudios desde sus hogares. No obstante, tales medidas han evidenciado una cadena de serias y diversas dificultades, tanto para los profesores de los diferentes niveles educativos como para los estudiantes y sus familias, en el intento de trasladar las clases de las aulas a los hogares.

Así, producto del contexto social vivido por la pandemia, el cual nos llevó inclusive a cuestionarnos el paradigma educativo que se tenía hasta el momento, nos ha permitido plantearnos preguntas genéricas pero cruciales sobre *qué hacer y cómo apoyar*, a partir de la investigación, a los diversos agentes que participan en estos procesos educativos, y en particular, a los profesores de matemáticas, quienes enfrentaron en primera persona los conflictos asociados a la adaptación de sus prácticas.

Algunas acciones de Países Latinoamericanos para mitigar los impactos de la Pandemia por CoViD-19 en la Educación ¿Cuáles fueron los desafíos?

Los gobiernos de diversos países Latinoamericanos, a través de sus Ministerios de Educación, implementaron medidas para garantizar que la educación continúe a pesar del cierre de las escuelas y universidades, para tratar de mitigar los efectos que conlleva el cierre de tales centros educativos (por ejemplo, el retraso en la formación de los estudiantes durante el 2020, el impacto emocional, etc.). Por ejemplo, los Ministerios de Educación de Chile, México y Colombia, tomaron la determinación de cerrar jardines infantiles, escuelas, colegios, universidades e instituciones de educación técnica, y como medida de contingencia decidieron continuar con el ciclo escolar 2020 (i.e., con las clases) pero de forma telemática, remitiendo tanto a estudiantes como a profesores a sus hogares. En Chile y en México a este programa se le denominó "aprendo en casa" o "aprendo en línea", mientras que en Colombia se llamó "aprender digital".

En Chile, el programa “aprendo en casa”[1] consistió en una página de internet donde se encuentran materiales para todos los niveles de enseñanza, desde educación parvularia hasta cuarto medio. Además, bajo este programa se contempló enviar material pedagógico (cuadernillos de actividades de lenguaje y matemáticas) a las escuelas rurales o en zonas donde tienen baja o nula conexión a internet. Sin embargo, recayó en las instituciones educativas la responsabilidad de complementar tal material con el diseño e implementación de clases virtuales para sus estudiantes. En el caso de las instituciones de educación superior, la estrategia fue implementar plataformas online para sus clases virtuales. La situación en México[2] y Colombia[3] fue similar, los estudiantes de educación básica y media superior podrían acceder a un repositorio educativo por medio de internet, y en el caso de México incluso por la televisión. Mientras que, en el caso de las universidades, cada institución de educación superior fue responsable de implementar clases virtuales por medio de los recursos y plataformas que dispusieron para ello.

Pero ¿qué ocurrió con la puesta en marcha de las acciones propuestas por los Ministerios de Educación de los países de Latinoamérica? ¿quién se hizo cargo, en este contexto de pandemia, de la educación de los estudiantes? ¿son funcionales las acciones que se implementaron por los Ministerios de Educación considerando el contexto en el que viven la gran mayoría de la sociedad Latinoamericana? ¿qué tan preparados estamos como sociedad para continuar con la educación de los niños y jóvenes en contextos de emergencia como el que estamos viviendo?

Durante el tiempo que se desarrollaron las clases virtuales (y en general, la educación en los hogares), se pusieron de manifiesto dificultades/necesidades tanto para los estudiantes, sus familias, los profesores, así como para las propias instituciones educativas. Una de las primeras limitaciones, o necesidades, que se manifestaron al implementar las propuestas emanadas por los Ministerios de Educación, fue la falta de conectividad a internet, y en muchos casos el acceso a computadores, tablets, entre otros dispositivos.

Realizar la docencia enteramente en línea desde el hogar, en modalidad sincrónica o asincrónica, supuso una serie de circunstancias ‘invisibles’ para la educación, pero que afectaron los procesos educativos tanto desde la perspectiva de los estudiantes como desde los profesores. Para los estudiantes, por ejemplo, tener padres o familiares trabajando en forma telemática en casa, sin espacios acondicionados adecuadamente para desarrollar sus actividades académicas, y en los cuales deben crear nuevos hábitos que les permitan adaptarse a la nueva modalidad educativa, son factores que obstaculizaron realizar idóneamente los procesos de enseñanza y aprendizaje. En definitiva, la gestión de la educación de los estudiantes en este ambiente telemático (y de confinamiento), es complejo y la responsabilidad no puede ser endosada únicamente al profesor de matemáticas.

Así, diversas son las necesidades que surgieron desde la perspectiva del profesor, además de lo comentado sobre las implicaciones del teletrabajo, se pronunció la falta de competencias digitales o tecnológicas (Mørk, 2014; Tømte, Enochsson, Buskqvist & Kårstein, 2015; Carvajal, Font & Giménez, 2018) y sus vínculos con otras competencias profesionales del profesor de matemáticas, tales como la matemática, de intervención didáctica y de análisis didácticos (Pino-Fan, Font & Breda, 2017). En Latinoamérica, se evidenció que gran parte de los profesores que tuvieron que asumir el reto de continuar con sus cursos de matemáticas de forma telemática, fueron sobrepasados por los usos de los recursos tecnológicos para poder llevar a cabo su práctica de enseñanza. En Chile, Colombia y México, los profesores en el contexto de pandemia Covid-19, y con las acciones emprendidas por los Ministerios de Educación, reflexionan sobre aspectos tales como ‘¿qué plataformas, software u otros, utilizo para mis clases virtuales sincrónicas?’, ‘¿quién me asesora sobre el uso de tales plataformas?’ ‘¿qué estrategias son pertinentes y óptimas en ambientes telemáticos

[1] Fuente: https://curriculumnacional.mineduc.cl/estudiante/621/w3-propertyname-822.html

[2] Fuente: https://www.gob.mx/sep and https://onceninos.tv

[3] Fuente: https://contenidos.colombiaaprende.edu.co

para la enseñanza de matemáticas?' '¿cómo evalúo los aprendizajes de los estudiantes?', '¿cómo fomento la interacción y supero las *pantallas negras*?', etc.

A partir de todo lo anterior, es necesario hacer una pausa para replantearnos ¿hacia dónde debemos dirigir nuestros esfuerzos en materia de educación matemática y, en concreto, en relación a la actividad de los profesores? ¿de qué forma la comunidad de investigación en Educación Matemática puede contribuir con esta mirada hacia el futuro en materia de formación de profesores?

La Formación de Profesores de Matemáticas: mirando hacia el futuro

Indiscutiblemente, la mayoría de los aspectos desafiantes para la formación de profesores de matemáticas se relacionan con los conocimientos y las competencias didáctico-matemáticas que le permitirían gestionar lo más adecuadamente los saberes de los estudiantes, atendiendo a elementos sociales y del contexto. Pero, de acuerdo a lo aprendido durante la pandemia ¿cuáles son líneas clave en las que podría centrarse la comunidad de investigación en Didáctica de la Matemática?

Práctica profesional y conocimiento del profesor

A pesar de la ubicuidad de los recursos tecnológicos, es común encontrar que algunos profesores no tienen el conocimiento, habilidades, experiencias propias ni ayuda externa, para integrar efectivamente la tecnología en las clases (Carvajal, Giménez, Font & Breda, 2018). Este aspecto amerita ser investigado a partir de diferentes enfoques teóricos y métodos. Algunos investigadores han examinado las prácticas de profesores cuando incorporan nuevas tecnologías en la educación, y han encontrado que el proceso de enseñanza de lecciones de matemáticas integradas en la tecnología se basa, en gran medida, en el conocimiento del profesor (Bozkurt & Ruthven, 2017; Gueudet & Trouche, 2009). Otros estudios han reconocido que el uso educativo de la tecnología exige diferentes habilidades que son necesarias para que el profesor de matemáticas "razone con", "cree" y "enseñe con" tecnología (Lobo da Costa, Galvão & Prado, 2017); a su vez, otros han puesto en consideración que se requiere identificar diferentes componentes del conocimiento didáctico-matemático del profesor en relación con las tecnologías (Pino-Fan, Assis & Castro, 2015; Castro, Pino-Fan & Velásquez, 2018). Algunos autores proponen un marco para integrar la tecnología, con el contenido y el conocimiento pedagógico. La integración requiere la coordinación de diversas facetas de la enseñanza (Pino-Fan, Assis & Castro, 2015), como la naturaleza epistémica de la matemática, las interacciones, los recursos tecnológicos y el contexto en el cual se usa la tecnología, con lo cual el papel del profesor, el currículo matemático y el propósito de la formación matemática se problematiza, y convoca al planteamiento de cuestiones para ser incluidos en una agenda de investigación.

Algunas preguntas que se pueden plantear son ¿De qué manera un componente tecnológico favorece la formación de profesores de matemáticas y su desarrollo profesional? ¿Cómo varían la epistemología de los objetos matemáticos al utilizar tecnologías, y cómo el profesor se hace consciente de ello? ¿Cómo plantear programas de desarrollo profesional que permita favorecer prácticas de inclusión de la tecnología en clase, presencial, virtual, sincrónica o asincrónica? ¿Cuáles aspectos podrían favorecer o impedir la inclusión de diferentes tecnologías en las prácticas docentes en diferentes niveles educativos? ¿Qué tipo de modelo del conocimiento del profesor podría dar cuenta del conocimiento del profesor en Chile, Colombia y México? ¿Cómo estudiar prácticas de lecciones de clase en un contexto virtual? (Peña, Pino-Fan & Assis, 2021; Lugo-Armenta & Pino-Fan, 2021) Los retos anteriores se pueden asumir en función de la existencia y adecuación de políticas públicas que promuevan la investigación y el uso de sus resultados para la toma de decisiones.

Vínculo familia-escuela

Hoy más que nunca es necesario investigar sobre el vínculo familia y escuela, junto con su incidencia en el desarrollo humano y en la formación de las nuevas generaciones. Según algunos investigadores (Meza & Páez, 2016), la familia tiende a considerar la escuela como 'guardería', o el sitio seguro donde sus hijos pueden estar vigilados y alimentados, mientras los padres trabajan. La escuela, por su parte, considera la participación periférica de la familia en los asuntos curriculares y en la planeación institucional. Algunos estudios informan que la participación de los padres está fuertemente relacionada con el rendimiento académico de los estudiantes (Epstein, 1994), además de que el aprendizaje matemático de los estudiantes mejora cuando las escuelas adoptan y desarrollan a los padres como recursos intelectuales (Civil & Bernier, 2004). En otras palabras, el aprendizaje matemático de los estudiantes se ve afectado tanto por la crianza de los hijos en el hogar como por la enseñanza en la escuela (Knapp, Landers, Liang & Jefferson, 2017). Sin embargo, las relaciones de la escuela con la familia suelen ser más burocráticas y sancionatorias que de colaboración, pero en la contingencia creada por el *Covid-19* se ha puesto al descubierto que la relación entre escuela y familia debe ser redefinida para lograr que las propuestas de formación matemática y ciudadana se puedan lograr en casa con la orientación de los profesores y con la ayuda de los padres. Así, ¿qué tipo de formación podrían recibir los profesores para promover el vínculo con las familias con el fin de que se contribuya a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes? ¿Cuáles debilidades, oportunidades y fortalezas tienen los sistemas educativos de los países latinoamericanos para vincular la familia y la escuela? ¿Cómo medir el éxito escolar a través del apoyo familiar en contextos de vulnerabilidad social? ¿Cómo puede la escuela, los profesores y la familia cooperar para el desempeño de los estudiantes?

Identidad social para el profesor versus identidad del profesor

La identidad del profesor de matemáticas ha sido discutida en varios estudios (Bjuland, Cestari & Borgersen, 2012; Boaler, 2002; Sfard & Prusak, 2005) y ahora con la crisis generada por la pandemia, se ha resaltado el papel social del profesor. La sociedad reconoce el efecto de su ausencia, los Ministerios de Educación intentan regular su disponibilidad, los recursos tecnológicos afectan las formas de disponibilidad y el currículo reconoce la ausencia del profesor en su diseño. La educación de los niños y jóvenes, en una sociedad en aislamiento, eventual, programado o sostenido, requiere una redefinición tanto del papel del profesor como del papel de la sociedad en la educación de los niños y jóvenes. Estas nuevas formas de identidad atribuidas por la sociedad deben interactuar con la identidad del profesor, en atención a las condiciones sociales, laborales, tecnológicas que regulan la interacción. Las creencias sobre educación matemática gubernamentales, sociales, de padres de familia, de profesores y estudiantes, deberían ser motivo de indagación. El reto que la investigación en educación matemática debe abordar en este sentido, refiere al papel del profesor en la escuela y, mayoritariamente, fuera de ella, en relación con la educación por medios virtuales, en ambientes hogareños, con diversidad de tecnologías, con currículos adaptados a las poblaciones, con ayuda de padres o acudientes, en atención a las necesidades de la sociedad.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto Fondecyt 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias Bibliográficas

Bjuland, R., Cestari, M.L., & Borgersen, H.E. (2012). Professional mathematics teacher identity: analysis of reflective narratives from discourses and activities. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15,* 405–424. doi: https://doi.org/10.1007/s10857-012-9216-1

Boaler, J. (2002). The development of disciplinary relationships: Knowledge, practice, and identity in mathematics classrooms. *For the Learning of Mathematics*, *22*(1), 42–47.

Bozkurt, G., & Ruthven, K. (2017) Classroom-based professional expertise: a mathematics teacher's practice with technology. *Educational Studies in Mathematics, 94,* 309–328. doi: 10.1007/s10649-016-9732-5

Carvajal, S., Gimenez, J., Font, V., & Breda, A. (2018). Creatividad, competencia digital y formación de docentes de matemáticas en secundaria. In Serna, Luis Arturo; Páges, Daniela (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 977-984). México City: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castro, W. F., Pino-Fan, L., & Velásquez-Echavarría, H. (2018). A proposal to enhance preservice teacher's noticing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *14*(11), em1569. doi: https://doi.org/10.29333/ejmste/92017

Civil, M., & Bernier, E. (2004). *Parents as intellectual resources in mathematics education: Challenges and possibilities.* Paper presented at the research presession of the NCTM, Philadelphia, PA.

Epstein, J. L. (1994). Theory to practice: School and family partnerships lead to school improvement and student success. In C. Fagnano & B. Werber (Eds.), *School, family, and community interaction: A view from the firing lines* (pp. 39–52). Boulder, CO: Westview Press.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199–218

Knapp, A., Landers, R., Liang, S. & Jefferson, V. (2017).We all as a family are graduating tonight: a case for mathematical knowledge for parental involvement. *Educational Studies in Mathematics*, *95*, 79–95.

Lobo da Costa N., Galvão M., & Prado M. (2017). Integration of Digital Technologies in Mathematics Teacher Education: The Reconstruction Process of Previous Trigonometrical Knowledge. In: Aldon G., Hitt F., Bazzini L., Gellert U. (Eds.) *Mathematics and Technology Advances in Mathematics Education* (pp. 523-550). Springer, Cham.

Lugo-Armenta, J.G., & Pino-Fan, L. (2021). Inferential statistical reasoning of math teachers: experiences in virtual contexts generated by the Covid-19 pandemic. *Education Sciences, 11*(7), 363. doi: http://dx.doi.org/10.3390/educsci11070363

Meza, J., & Páez-Martínez, R. M. (eds.) (2016). *Familia, escuela y desarrollo humano*. Bogotá, D. C.: Universidad de La Salle, Clacso.

Mørk, F.R & Rune,J.K. (2014). Developement of student teacher's digital competence in teacher education.*Nordic Journal of Digital Literacy*,9(4),250-280.

Peña, C., Pino-Fan, L., & Assis, A. (2021). Normas que regulan la gestión de clases virtuales de matemáticas en el contexto COVID-19. *Uniciencia, 35*(2), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.21

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a

Pino-Fan, L., Font, V., & Breda, A. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Singapore: PME.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, *34*, 14-22. doi:10.3102/0013189X034004014

Tømte, C., Enochsson, A. B., Buskqvist, U., & Kårstein, A. (2015). Educating online student teachers to master professional digital competence: The TPACK-framework goes online. *Computers & Education*, *84*, 26–35. doi: https://doi.org/10.1016/j.compedu.2015.01.005

EL PAPEL DE LA MODELACIÓN EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICA

Rodolfo David FALLAS SOTO
Departamento de Educación Matemática y Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
rodolfo.fallas@ucr.ac.cr

Resumen

En este trabajo se describe una problemática que nace durante la pandemia en relación con utilizar el proceso de modelación para el aprendizaje de la futura persona educadora matemática. A partir de una revisión bibliográfica se obtienen reflexiones que contribuyen a llevar a cabo una ruta metodológica para diseñar, implementar y analizar actividades de modelación desde la virtualidad, colocando la atención en la comprensión conceptual de los objetos matemáticos a partir de una epistemología de prácticas. Se obtienen importantes reflexiones finales como mencionar ventajas y desventajas en la forma de utilizar dos tipos de simulaciones digitales, permitiendo llevar el proceso de modelación desde la virtualidad. Además, se mencionan retos para la etapa post–pandemia sobre la temática y reflexiones sobre las conclusiones que se obtenían durante las clases al desarrollar la modelación en la formación la persona educadora matemática, desde cinco ejes de formación: histórico–epistemológico, didáctico–matemático, desempeño profesional, aplicaciones de la matemática y tecnologías de la información y la comunicación.

Palabras clave: Modelación – Simulación - Educación Matemática - Formación de Profesores.

Introducción

Este documento es el resultado de reflexiones generadas entre ser docente de un curso de la carrera de Educación Matemática y de las lecturas realizadas sobre la modelación en el proyecto de investigación C1187 del Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, en la Universidad de Costa Rica.
La carrera de Educación Matemática, ofrecida desde el año 2017, nace gracias a un arduo trabajo entre personas que buscó la mejora de formar profesionales en la disciplina, rompiendo con un modelo tradicional donde no existía relación entre cursos de educación y los de matemática, menos aún, no se consideraba en la formación a la especialización en el campo disciplinar, que es fundamental para construir su identidad.
La carrera está construida sobre cinco ejes de formación, que deben ser considerados para el diseño, desarrollo y análisis de cada curso ofrecido: Historia y epistemología de la matemática, didáctico-matemático, desempeño profesional, aplicaciones de la matemática y tecnologías de la información y la comunicación. Específicamente en el 2021 se presenta el reto para desarrollar el curso de ecuaciones diferenciales de forma virtual para la persona que se forma en la carrera de Educación Matemática considerando a estos ejes de formación y la búsqueda de herramientas digitales que propicien un desarrollo adecuado de las clases.
Por otro lado, investigaciones como las de (Almeida, 2017; Barros, 2015; Czocher, 2017; Hernández, Jaimes, & Cháves, 2016; Morales & Cordero, 2016; Rodríguez, 2010; Rodríguez & Quiroz, 2016; Trigueros, 2014) brindan resultados profundos sobre el papel que juega la modelación para el aprendizaje de la matemática. Uno de los principales atractivos de la modelación es la relación entre comprender y ser parte de un contexto situacional real que permite la construcción y significado de objetos matemáticos. Compartiendo las caracterizaciones que realizan Rodríguez y Quiroz (2016, p. 104) la modelación matemática desde una perspectiva educacional "es una estrategia didáctica que tiene como objetivo el dar contexto a las matemáticas en la escuela", agregamos, que es un proceso cíclico que desde un contexto situacional real se relacionan varios modelos: factual (observable), técnico o científico (con un lenguaje específico como físico, biológico, economía, construcción) y específicamente el matemático (logrando un significado de los objetos matemáticos en cuestión).
Desde este contexto el problema convirtiéndose un reto en la pandemia: ¿se podrán llevar a cabo actividades basadas en el proceso de modelación desde la virtualidad para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en la formación de profesionales en la educación matemática? Se inicia considerando la hipótesis de que la simulación puede ayudar desde la virtualidad a llevar a cabo un proceso de modelación y así construir matemática y significado a objetos matemáticos.
El objetivo de este estudio es analizar la ruta metodológica utilizada para la implementación de actividades en relación con la modelación para la significación de objetos matemáticos en la formación de docentes de matemática. Con ello se ofrecen descriptores, un esquema de modelación de referencia para el diseño e implementación, limitaciones y sugerencias para la mejora.

La Modelación en la Didáctica de las Ecuaciones Diferenciales

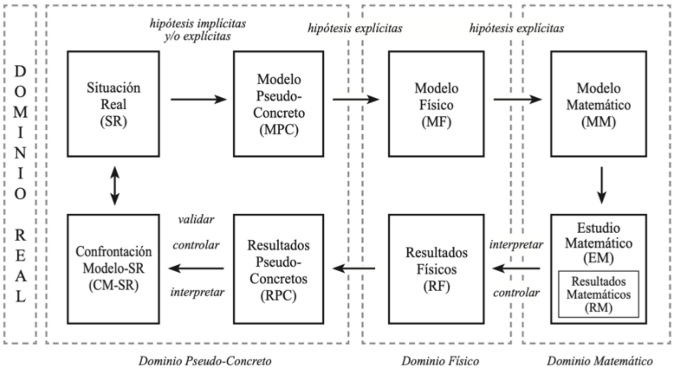
García, Hernández y Poveda (2014) desde la modelación y simulación (como comparación entre el modelo y la situación real) diseñan actividades y concluyen que "desarrollar actividades donde se usen las ecuaciones diferenciales impactan de forma positiva al aprendizaje de los estudiantes y además promueve un grado de autonomía del aprendizaje con importancia en las aplicaciones y uso del software" (García et al., 2014, pp. 7783–7784). Cabe señalar, que las aplicaciones que mencionan los autores se centran en los métodos de resolución de la ecuación diferencial y situaciones hipotéticas dada la complejidad de la realidad.
Por otro lado, Barros (2015) tomando una tarea que califica como interdisciplinaria, muestra el uso que tiene las ecuaciones diferenciales en la modelación de situaciones, que desde un inicio parecen incontroladas: una situación de epidemiología. Se apoya de la interpretación visual de la epidemia y métodos cualitativos que ayudan para significar los diferenciales que forman al modelo matemático. Se evidencia que no solamente desea que se construya la ecuación diferencial asociada con la situación de epidemias, sino que se necesita de su comprensión y uso para poder determinar un número mínimo de individuos para que ocurra una incidencia de la epidemia, antes de que toda la población vaya a morir. Este trabajo brinda la reflexión sobre el uso que tiene la modelación ante la necesidad del planteamiento de la ecuación diferencial como un modelo predictivo que ayude a resolver un problema real y en propiciar que se construya la noción de valor inicial con un propósito predictivo.
Cantoral, Moreno–Durazo y Caballero–Pérez (2018) tienen como hipótesis central, que detrás de las prácticas predictivas, se encuentran formas de razonamiento matemático asociadas al estudio de las pequeñas variaciones a pesar del hecho de que tal conocimiento no se enseñó formalmente en la escuela. Mencionan que este principio del pensamiento suele evidenciar el uso de las prácticas predictivas ante

fenómenos deterministas y no deterministas, caracterizado por el uso de un razonamiento con supuestos que suelen ser fundamentales para el desarrollo del pensamiento matemático y que aparecen en muchas tareas profesionales. La sugerencia que ofrecen en su investigación para el estudio de la modelación, es "fomentar la investigación en educación matemática con la matematización de fenómenos no deterministas más cercanos a la realidad de cada ciudadano del siglo XXI, ya que contribuye al desarrollo del *Pensamiento y el Lenguaje Variacional*" (Cantoral et al., 2018, p. 88).

Por otro lado, Czocher (2017) presenta un estudio comparativo causal de métodos mixtos de dos enfoques de instrucción en un curso de ecuaciones diferenciales para estudiantes de ingeniería. Nos menciona "que al tener una mejor comprensión del papel de las condiciones sobre el mundo real y el comportamiento del fenómeno, ayuda a realizar las conjeturas apropiadas en el método analítico de los coeficientes no determinados" (Czocher, 2017, p. 92)

Rodríguez y Quiroz (2016) con apoyo de los trabajos previos de Rodríguez (2007, 2010) muestran un modelo de modelación matemática como un ciclo entre la situación real, modelo físico y modelo matemático, con apoyo de los recursos tecnológicos (ver figura 1). Rodríguez y Quiroz (2016) reportan las acciones utilizadas por los estudiantes y que ayudan a comprender ciclo de la modelación: realizar hipótesis, interpretar, controlar, validar, confrontación con el modelo real.

Figura 1. Ciclo de modelación



Rodríguez (2007, 2010)

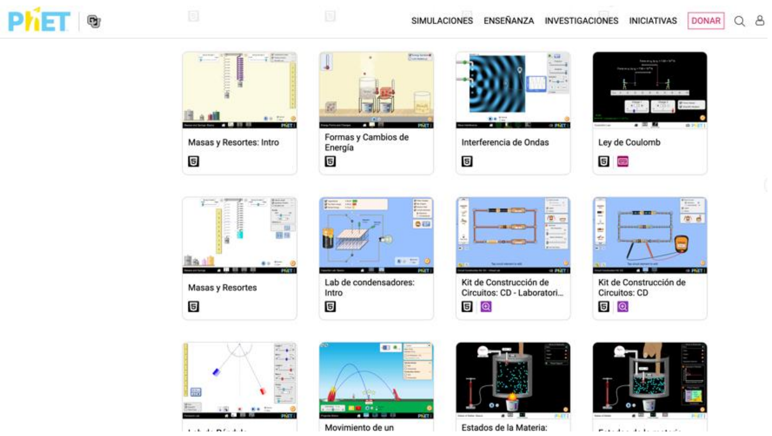
Una ruta teórico–metodológica para el diseño, la implementación y el análisis de actividades de modelación

Desde las reflexiones y elementos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2019) en este caso particular no se centra la atención en resolver ecuaciones diferenciales o simplemente llegar a construir un modelo matemático, sino en centrarse en aquellas prácticas (como por ejemplo comparar, conjeturar, equivaler, acotar) que ayudan a construir el objeto matemático y un significado desde el contexto situacional real. Esto no quiere decir que el aprender a resolver ecuaciones esté malo, los métodos para determinar la solución son tan valiosos como la comprensión conceptual del objeto a partir de las prácticas. En este trabajo se aporta a lo segundo.

Dada la realidad de la virtualidad, se pierde el hecho de tomar datos o realizar conjeturas desde lo observable en forma presencial. Por lo que se decide tomar dos tipos de simuladores para el estudio y construcción de ecuaciones diferenciales:

- Simulaciones interactivas de ciencias y matemáticas creadas por la University of Colorado Boulder en donde las personas pueden realizar experimentos virtuales como con el crecimiento poblacional, mezclas, circuitos eléctricos, resortes, péndulos, entre otros más (figura 2).

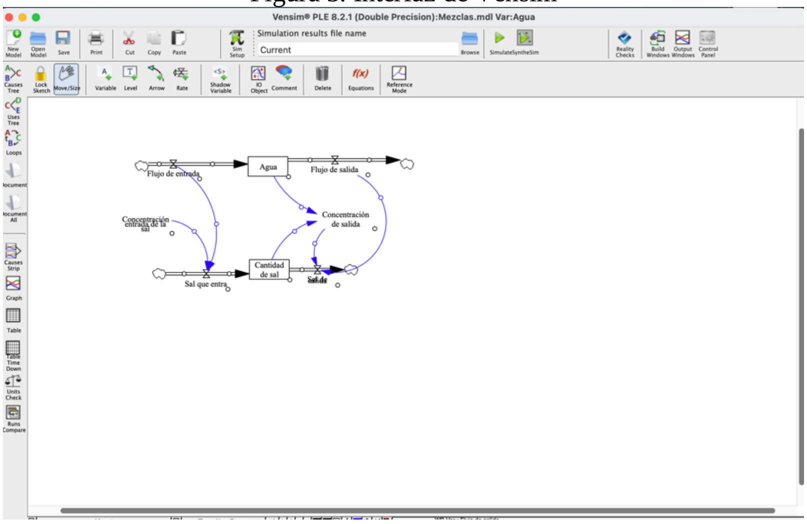
Figura 2. Captura de pantalla de la página PhET Interactive simulation



Fuente: https://phet.colorado.edu/es/simulations/filter?subjects=physics&type=html,prototyp

- Simulador digital usando un lenguaje orientado a bloque, llamado Vensim, con una edición de aprendizaje personal gratuito, este proporciona una interfaz de modelado gráfico con diagramas de existencias y flujos y bucles causales, además de un sistema de ecuaciones basado en texto en un lenguaje de programación declarativo (figura 3).

Figura 3. Interfaz de Vensim



Además desde los trabajos de (Fallas-Soto, 2019; Fallas Soto & Cantoral, 2016, 2018) dan bases para reflexionar sobre una epistemología de prácticas para construir los significados de la ecuación diferencial y su solución. Estos trabajos tienen su inicio con una problematización del teorema de existencia y unicidad, un estudio histórico-epistemológico aportando a la importancia de prácticas como: estimar sobre el comportamiento del fenómeno en estudio, conjeturar sobre esas estimaciones, equivaler en la construcción de una ecuación diferencial y su relación con el lenguaje disciplinar (físico, biológico, etc.), comparar soluciones de ecuaciones con diferentes valores iniciales, acotar sobre el cambio o dar condiciones para obtener un comportamiento deseado (variación acotada), dar predicciones a corto plazo sobre el comportamiento del fenómeno dada la solución y visualizar los campos direccionales.

Con estos antecedentes se deciden abordar en clases varias aplicaciones de las ecuaciones diferenciales como: crecimiento poblacional, mezclas, circuitos eléctricos RC y RLC con la siguiente metodología:

1. Cualificación del cambio a partir de exploración del contexto, lo observable con apoyo de las simulaciones PhET.
2. Comprender el lenguaje técnico y las equivalencias que aparecen en el modelo.
3. Construcción de la ecuación diferencial y visualización del campo direccional para determinar la relación entre los valores iniciales, la solución y el fenómeno en estudio.
4. Construir una simulación en Vensim que represente el sistema estudiado y su relación con la construcción de la ecuación diferencial, uso del valor inicial y predicción sobre las gráficas generadas.

5. Predecir sobre un valor futuro del fenómeno o dar condiciones para obtener un comportamiento deseado.

Además, como parte de la evaluación, las personas estudiantes desarrollaron tareas con esta misma ruta, para construir y dar significado a la ecuación diferencial, su solución y valores iniciales. En las tareas se abordaron el enfriamiento, el péndulo y el resorte.

Reflexiones Finales

Este trabajo da insumos para aportar al esquema de modelación que construye Rodríguez (2007, 2010), desde una visión Socioepistemológica. Sería interesante fortalecer este modelo con la intervención de otras personas expertas en la física, química, biología u otras disciplinas para construir en el trabajo que desarrollen las futuras personas educadoras matemáticas en este y otros cursos.

Se reconocen dos tipos de simulaciones: simulación digital interactiva para la comprensión del fenómeno y la simulación digital usando un lenguaje orientado a bloque. Ambas jugaron un papel importante para la construcción y comprensión de los objetos matemáticos pero ambas simulaciones tienen naturaleza diferente en su uso. La primera ayuda más en comprender el contexto situacional real, para que no sea tan lejano de la realidad de quien aprende, mientras que la segunda contribuye a fortalecer el significado de los objetos. Con el simulador Vensim, las personas estudiantes comprendieron a "rate" como los cambios que se le aplican al valor inicial, cambios de entrada y de salida, mientras que a la caja "level" como la acumulación de cambios que ayudan a obtener la solución. La ecuación diferencial sería entonces ese estudio de acumulaciones de los cambios, resignificando a la integral y a la derivada.

La simulación a pesar de que permite comparar el modelo con la realidad además tiene otras ventajas: garantiza seguridad para trabajar con fenómenos como circuitos eléctricos, la variable tiempo no causa problemas para trabajar de forma hipotética un crecimiento poblacional o mezclas, da sentido a los valores iniciales cuando algo no está funcionando bien, se ahorra en equipo físico, permite dar ilustraciones de lo que físicamente no se ve como carga eléctrica. Además, se debe estudiar a la simulación globalmente (las relaciones entre cada elemento de la simulación) y localmente (estudiando la información que almacena cada elemento).

Pero también se observan ciertas desventajas con la forma de trabajar con el simulador: si la persona estudiante juega con las simulaciones interactivas sin llevar un orden de la experimentación que sigue puede perder la racionalidad de su actuar, dificultad por comprender el lenguaje Vensim al solamente escribir el diagrama sin reflexionar con lo realizado anteriormente. En ocasiones mostraban preocupaciones por crear un modelo con Vensim desde cero, un reto para ver que otras estrategias utilizar usando este software.

Este ir y venir entre el fenómeno y la ecuación diferencial desde la modelación ayudó a que las personas que se forman en la educación matemática brindaran reflexiones sobre desarrollar estudios cualitativos del cambio en otros escenarios escolares: primaria y secundaria, con fines diferentes. Definitivamente la modelación y el papel que puede jugar la simulación en este proceso puede ayudar al aprendizaje de la matemática en diferentes niveles educativos.

Desarrollar este tipo de actividades creó un escenario integrador para usar reflexiones histórico-epistemológico de la matemática relacionando la epistemología de prácticas y en el origen de las ecuaciones diferenciales; propiciar espacios para la reflexión didáctico matemático en la significación de objetos, propuestas de situaciones en otros escenarios, dificultades; desempeño profesional para reconocer la importancia que tiene en la disciplina el diálogo interdisciplinar y el uso de herramientas digitales como los simuladores en la construcción de conocimiento. Dando lugar merecido a los cinco ejes de formación de la carrera de Educación Matemática en la Universidad de Costa Rica.

Actualmente se vive la post pandemia, aparecen nuevos retos para desarrollar este proceso de modelación, pensando en trabajar con materiales accesibles. Se hereda un conocimiento y experiencias de la simulación como esas herramientas digitales valiosas que actualmente se pueden integrar con la experimentación física para desarrollar habilidades en la formación de la persona educadora matemática.

Agradecimientos

Al Departamento de Educación Matemática y al Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas de la Universidad de Costa Rica por el apoyo al proyecto de investigación C1187.

Referencias Bibliográficas

Almeida, L. M. W. (2017). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 19–30. Retrieved from https://doi.org/10.1007/s11858-017-0902-4

Barros, A. (2015). Modelos matemáticos de equações diferenciais ordinárias aplicados à epidemiologia. *Revista de Ciências Exatas e Tecnologia*, *2*(2), 62–67.

Cantoral, R. (2019). Socioepistemology in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education*. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100041-1

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A., & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 77–89. Retrieved from https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Czocher, J. A. (2017). How can emphasizing mathematical modeling principles benefit students in a traditionally taught differential equations course? *Journal of Mathematical Behavior*, 45, 78–94. Retrieved from https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.10.006

Fallas-Soto, R. (2019). *Variación acotada y predicción. Prácticas socialmente compartidas en la significación de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial*. Cinvestav.

Fallas Soto, R., & Cantoral, R. (2016). Estudio socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad em las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Histemat*, *2*(3), 256–280.

Fallas Soto, R., & Cantoral, R. (2018). La variación acotada y su rol en el estudio del cambio. *Revista de Investigación e Innovación En Matemática Educativa*, *3*(1), 25-35.

García, O., Hernández, N. A., & Poveda, R. M. (2014). Ditactic actions differential equations learning betterment in engineering careers. *Applied Mathematical Sciences*, 8(156), 7775–7784. Retrieved from https://doi.org/10.12988/ams.2014.48600

Hernández, C., Jaimes, L., & Cháves, R. (2016). Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con geogebra: actividades para resolver problemas de mezclas. *Mundo Fesc*, *1*(11), 7–15.

Morales, A., & Cordero, F. (2016). La graficación - modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *17*(3), 319–345. Retrieved from https://doi.org/10.12802/relime.13.1733

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(4–I), 191–210.

Rodríguez, R., & Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *19*(1), 99–124. Retrieved from https://doi.org/10.12802/relime.13.1914

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática*, 25, 207–226. Retrieved from http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854011

MODELACIÓN EN MATEMÁTICA
EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Marcel David POCHULU
Universidad Nacional de Villa María
Universidad Tecnológica Nacional – Regional Villa María
Argentina
mpochulu@unvm.edu.ar, mpochulu@frvm.utn.edu.ar

Resumen

Presentamos y reflexionamos sobre algunos resultados de investigaciones centrados en lo que se espera de la formación de profesores de Matemática en época actuales. En particular, cuestionamos el modo de formar profesores de cara a los enfoques que se piden para la formación de profesionales de otras disciplinas. Los puntos de partida que esbozamos podrían servir para pensar en un enfoque diferente en la formación de profesores, donde se trabajen problemas reales del campo profesional en el que se inserta la Matemática, donde la modelación cobra importancia. Para ello, es necesario que iniciemos un proceso de cuestionamiento sobre el saber matemático y el saber matemático escolar, que se sintetiza al preguntarnos, ¿por qué debería enseñar este contenido?, ¿existen otras maneras de enseñarlo en este contexto y para esta carrera en particular? ¿qué problemas son más apropiados? y evitar la reproducción de modelos que seguramente estuvieron presentes en nuestra formación previa.

Incorporar la modelación matemática en la enseñanza nos aproxima a los campos profesionales de las carreras y no se descuidan los contenidos de Matemática, que suelen ser una preocupación central de los profesores. No obstante, es necesario que nos involucremos en los conocimientos y lógica de otros campos disciplinares, fundamentalmente cuando impartimos clases en carreras no matemáticas o brindamos una formación matemática general.

Palabras clave: Modelación Matemática - Formación de Profesores - Enseñanza de la Matemática – Interdisciplinariedad.

Introducción

La enseñanza de la Matemática plantea grandes desafíos para quienes tienen que enseñarla en los distintos niveles educativos. En tiempos pasados era suficiente que el profesor presentara un contenido, propusiera ejemplos y ejercicios similares para que resuelvan los estudiantes siguiendo pautas previamente explicadas y, finalmente, planteara algún "problema" de aplicación de lo trabajado (Rodríguez y Barreiro, 2018). En este sentido, Alsina (2007, p.85) expresa categóricamente que "gran parte del tiempo dedicado a la enseñanza de la matemática se dedica a la resolución de ejercicios rutinarios alejados de la vida cotidiana". Además, Chavarría y Hidalgo (2009, p. 140) sostienen que "nos olvidamos de llevar a nuestras aulas sencillas discusiones que permitan al estudiante valorar el esfuerzo que le demandó a la humanidad llegar a los resultados matemáticos a los cuales tenemos acceso con tanta facilidad".

Es fácil darse cuenta que los retos presentados por las diversas ciencias o disciplinas llegan hoy a la clase de Matemática convertidos en problemas que plantean la necesidad de un abordaje interdisciplinario. Esto nos lleva a cambiar el modo de pensar y actuar en la clase y, mucho más importante aún, lograr que los estudiantes logren tener una educación diferente y acorde a las demandas actuales. No podemos seguir siendo profesores del siglo XIX enseñando una Matemática del siglo XVII a estudiantes del siglo XXI.

Al profundizar en los detalles de las propuestas de enseñanza que se sugieren desde organismos oficiales o especialistas del campo de la Educación Matemática, advertimos que son necesarias capacidades y saberes que trascienden el propio campo de la Matemática. Por ejemplo, para el MECCT (2019, pp. 23-24) un profesor de Matemática debería contar con conocimientos interdisciplinarios que lo lleven a diseñar tareas para que los estudiantes se involucren en las matemáticas de la vida cotidiana, como, por ejemplo:

> Comprender si es conveniente una oferta o promoción de venta de un producto; transitar barrios o ciudades desconocidas conservando la orientación; recalcular los ingredientes de una receta cuando cambia el número previsto de comensales; interpretar resultados de análisis médicos contrastando los valores en relación con los de referencia, los factores de riesgo, la esperanza de vida, etc.; tener una actitud crítica ante las informaciones presentadas en los medios de comunicación en formato de cifras o gráficos, distinguiendo opinión de proposición; manejar criterios confiables de generación y gestión de palabras clave y otros tipos de códigos de seguridad; entender facturas de consumo de servicios domésticos (electricidad, gas, agua, entre otras); comprender y explicar los motivos por los que todos los juegos de azar que involucran dinero han sido diseñados para que gane la banca y se arruine al jugador; decidir cuál es más conveniente entre distintos planes de crédito; conocer cómo se elaboran los índices económicos y sociales y analizarlos críticamente; estar mejor preparado para comprender conceptos de otras disciplinas: interés, velocidad, amortización, susceptibilidad, etc.; abstraer y generalizar de estas situaciones de la vida las relaciones, categorías y propiedades matemáticas que están involucradas. MECCT (2019, pp. 23-24)

Si nos pasamos al nivel universitario, la Secretaría de Políticas Universitarias de Argentina realizó, en febrero de 2019, la convocatoria para el Programa Logros, línea de trabajo Enseñanza de la Matemática (EMA). El Programa Logros EMA expresa, en sus bases y que encontramos en SPU (2019), que es necesaria la actualización de la formación docente en didácticas innovadoras para la enseñanza de la Matemática, como parte de una alfabetización contextualizada de los estudiantes de diferentes disciplinas. Además, el documento enfatiza que no es posible sostener propuestas formativas que fueron originadas en el contexto del siglo XX para la formación de ciudadanos del siglo XXI.

En la misma línea de pensamiento, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), decidió cambiar estructuralmente la formación de ingenieros en Argentina, proponiendo un enfoque de enseñanza que debe estar centrado en el estudiante y en contribuir al desarrollo de las competencias profesionales requeridas para cada carrera. Entre las razones de esta innovación en ingeniería se afirma que "el mundo cambió y sigue cambiando, y la sociedad actual exige más a la Universidad; no sólo exige la formación profesional (el "saber"), sino también, la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el "saber hacer")" (CONFEDI, 2014, p. 9). Por consiguiente, es necesario formar a un ingeniero pensando en lo que efectivamente hace en su profesión, desde todas las asignaturas que conforman un plan de estudio de la carrera, proponiendo procesos de enseñanza y aprendizaje para que tiendan al desarrollo y evaluación de las competencias. Naturalmente la Matemática conforma el bloque de las ciencias básicas para ingeniería y no escapan a este pedido de formación.

Para las carreras técnicas del nivel superior no universitario de la Provincia de Córdoba, Argentina, los diseños curriculares requieren la incorporación de prácticas formativas que apunten al perfil profesional de las mismas y desde cada espacio curricular. Nuevamente esto impone al profesor el desafío de diseñar clases de Matemática que puedan hacer un aporte a un perfil profesional que puede ser distante al de su propia formación. Basta que pensemos en la formación de técnicos en Administración de Empresas, en Alimentos, en Agro-Bio-Economía, u otra orientación, donde las incumbencias profesionales implican actividades como: administrar los fondos y las finanzas, administrar la producción, realizar análisis de ensayos e interpretar sus resultados, entre otras.

Tales planteos, muchas veces fruto de largas discusiones entre especialistas de diferentes campos disciplinares o de resultados de investigaciones, ponen en escena algún tipo de condicionamiento didáctico-matemático que el profesor a cargo de una materia tendría que atender en su propuesta de enseñanza, ante los nuevos roles que le está imponiendo la profesión. A su vez, esto pone a la luz la necesidad, tanto a nivel secundario como superior, de que los profesores a cargo de una materia puedan adaptar y/o diseñar sus propuestas de enseñanza a los requerimientos académicos que reciben o les son impuestos desde las instituciones u organismos oficiales.

Pensar en cómo enseñar materias que están en la formación de otras profesiones o con enfoques diferentes a los que atravesaron los futuros profesores, requeriría transformarlas y reorganizarlas para hacerlas objeto para la enseñanza (Pochulu, 2018). Inicialmente rigen criterios epistemológicos, que responden a la organización lógico-conceptual de cada disciplina, pero se suman otros que fundamentalmente aportan a entender cómo plantear la enseñanza, teniendo presente a los destinatarios de ella. Esto nos lleva al planteo de un sinnúmero de interrogantes, con la intención de establecer algunas pautas o criterios que contribuyan a la formación y capacitación de profesores de Matemática. Entre ellos tenemos: ¿Cómo transformar la clase de Matemática para que responda a las necesidades de un mundo globalizado y de un mercado de trabajo flexibilizado cuyas demandas formativas mutan constantemente? ¿Cómo se podría confiar en el sentido de lo que enseñamos si lo que hacemos en las aulas está siendo profundamente cuestionado? ¿Qué cuestiones se podrían considerar desde la formación inicial de profesores para afrontar las nuevas tareas que impone la profesión? ¿Qué proceso debe vivir el profesor para que se apropie del saber matemático escolar y de su práctica para los diferentes contextos donde ejercerá la profesión? ¿Cuál es el proceso que debe vivir el saber matemático para que la visión del aprendizaje del profesor no esté centrada en objetos abstractos ajenos a la realidad, tal como ha ocurrido hasta el momento?

La Modelación Matemática en la Formación de Profesores

Partimos de la premisa de que muchos de los problemas actuales requieren ser abordados en una clase involucrando contenidos que suelen escapar a los que habitualmente trabajamos en la clase de Matemática (Pochulu, 2018). Sabemos que estas situaciones ponen a los profesores en la posición incómoda e inusual de no saber contenidos de otras disciplinas, o incluso de la propia Matemática cuando se requiere que sea aplicada. Al mismo tiempo, hay que pensar que nos encontramos en una comunidad donde el profesor es un coordinador de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y no quien tiene todas las respuestas. Asimismo, es necesario desterrar la idea de que el estudiante tiene que contar con todos los conocimientos matemáticos para abordar un problema, o que usará solamente métodos y algoritmos tradicionales enseñados en la escuela. Tampoco podemos ignorar la presencia de la tecnología que media la resolución de cualquier tipo de problema, y más aún, si pretendemos un enfoque unificado de la enseñanza de la Matemática.

Podemos ver que a lo largo de la historia existió una estrecha interrelación entre la Matemática y las demás disciplinas, las que deben ser retomadas en las clases actuales a través de la resolución de problemas, la interdisciplinariedad y la modelización como estrategia pedagógica. Además, ciencias como la Biología, Fisiología, Medicina, Agronomía, entre otras, demandan nuevas herramientas matemáticas que permitan un manejo más ágil de los datos experimentales. Esto supone la existencia de un grupo de disciplinas relacionadas entre sí y con vínculos previamente establecidos, donde se tiene que evitar el desarrollo de acciones aisladas, dispersas o segmentadas. De alguna manera, estamos ante una subordinación de las áreas del conocimiento a la percepción y comprensión del mundo. Pero, ¿es posible llegar a la interdisciplina sin pasar por la disciplina? Andonegui (2004) plantea que la visión interdisciplinaria requiere que no se devalúe ni se mutile ningún conocimiento disciplinar, puesto que todos son necesarios, y al mismo tiempo, que no se levanten muros entre las distintas ciencias dado que ninguna de ellas es más relevante que las demás.

No obstante, la interdisciplinariedad no debe visualizarse como el proceso de utilizar a una disciplina como herramienta de la otra. Si bien es cierto que la Matemática tiene el papel de herramienta en muchas otras ciencias para la resolución de problemas, no puede ser concebido este proceso como interdisciplinariedad. Chavarría e Hidalgo (2009) sostienen que ignorar o despreciar las interrelaciones entre las ciencias, incluida actualmente la tecnología, alimenta una polémica estéril que se transfiere de forma inevitable al ámbito escolar. A su vez, es necesario que el cuerpo de profesores sea reflexivo ante las necesidades que tienen las disciplinas y las herramientas que brinda la Matemática. Por ejemplo, si analizamos lo que acontece con problemas del mundo real pertenecientes a otras ciencias, advertimos que en general, parten de datos experimentales. Con ellos se buscan modelos matemáticos para describir las relaciones entre las variables y así poder pronosticar, predecir, estimar o anticipar comportamientos en el corto y mediano plazo. Eventualmente se presentan gráficas que muestran la relación entre las variables y en este caso, los nuevos recursos suelen ser un buen aliado. Estas temáticas, sin dudas, se encuentran insertas en la Matemática, pero ¿se abordan en una clase habitual dentro de una carrera no matemática o de formación general? ¿Qué está en el detrás de escena cuando diseñamos problemas para una clase?

Reflexionemos sobre lo que ocurre en una clase de Matemática de la actualidad. Imaginemos que nos situamos en un primer curso de Matemática donde se pretende considerar a las funciones como objeto matemático. Habitualmente el profesor suele partir de un modelo funcional previamente establecido y se preocupa por hacer y mostrar un análisis minucioso del comportamiento de la función, prescindiendo incluso de nuevas tecnologías (nuestro clásico análisis completo de una función). El estudio conlleva a determinar en forma algebraica, y con tediosos cálculos, máximos y mínimos locales, raíces, asíntotas, concavidad y convexidad de la curva, paridad, entre muchos otros objetos matemáticos. Posteriormente, procede a realizar un gráfico aproximado de la función y a mano alzada, con lápiz y papel. ¿Esto era lo que requería el campo profesional? Definitivamente no, pues no era la preocupación central de una disciplina no matemática hacer un gráfico de una función, la cual no se tiene en la mayoría de los casos o, si se tiene, se realiza fácilmente con un software. En consecuencia, existe un divorcio entre lo que requieren las diferentes ciencias y lo que está aportando actualmente la Matemática. Pero, ¿cómo iniciamos un diseño de un problema genuino para la clase de Matemática y en una carrera no matemática?

Es necesario pensar en un enfoque diferente donde se trabajen problemas reales del campo profesional en el que se inserta la Matemática, donde la modelización adquiere un rol protagónico. ¿Significa que no tenemos que pasar por la disciplina o debemos prescindir de contenidos centrales de la Matemática? No, pues podemos trabajar lo disciplinar desde la misma interdisciplinariedad, pero sí tenemos que revisar lo que estamos enseñando y la metodología empleada. Hace más de 30 años, Santaló (1990) expresaba que teníamos que incorporar temas que se requieren desde las demás disciplinas, suprimiendo otros que quedaron obsoletos, pues de lo contrario, se lograría que los estudiantes se sientan poco atraído por las actividades del aula. Sin embargo, esto que planteaba Santaló sigue teniendo vigencia hoy en día y termina siendo una dificultad a sobrellevar en la formación matemática de muchas carreras universitarias no matemáticas.

Naturalmente que el foco de cada propuesta se enseñanza estará puesto en que los estudiantes aprendan algo matemático, pero los tiene que ayudar a tener pensamientos interdisciplinarios al resolver problemas complejos de la realidad. En consecuencia, cuando nos proponemos enseñar ciertos contenidos matemáticos, tendríamos que tener respuestas genuinas a los siguientes cuestionamientos:

> ¿Por qué son necesarios y se deben enseñar? ¿Qué tipo de problemas resuelven? ¿Con cuáles otros conceptos, operaciones, propiedades, definiciones, se lo asocian? ¿Qué tipo de argumentaciones se utilizan a propósito de los mismos? ¿Qué lenguaje representa y operativiza sus principales funciones y usos? ¿Qué contextos dejan al descubierto el o los significados que se pretenden generar? ¿Qué contextos ayudan a comprender diferencias y similitudes entre los objetos y otros vinculados a ellos? ¿Cuáles situaciones provocan cambios y evolución de significados de los objetos? ¿En qué contexto histórico y cultural aparecen los conocimientos matemáticos en cuestión? ¿Cómo contribuyen a la construcción y organización del saber matemático? (INFD, 2010, p. 122).

De alguna manera, responder estas preguntas nos ayudará a iniciar un proceso de cuestionamiento sobre el saber matemático y el saber matemático escolar, que se sintetiza al preguntarnos, ¿por qué debería enseñar este contenido?, ¿existen otras maneras de enseñarlo en este contexto y para esta carrera? y evitar que reproduzcamos modelos que seguramente estuvieron presentes en nuestra formación previa. La búsqueda de respuestas a estas preguntas nos llevará a descubrir vínculos que unen los fenómenos aparentemente inconexos entre distintas ciencias o disciplinas.

Pensamos que a través de la modelación se logran crear ambientes reales y actuales de estudio, con situaciones que pueden ser significativas para el alumno. Esto llevaría, si media un buen diseño, a que cada consigna de trabajo propuesta escape de los estándares que estamos acostumbrados para los problemas de Matemática, lo cual se materializa cuando no incluimos demasiados datos, ni los pasos a seguir o la manera en que debería hacerse la actividad. Entendemos que estas características hacen que una consigna se enmarque en lo que llamaríamos problemas no rutinarios, en tanto la información que se suministra o bien es insuficiente o hay datos que sobran, no existe un único camino para abordarlos, se ponen en juego distintas estrategias de resolución, pueden existir varias soluciones o bien no tener solución alguna. A su vez, deberían estar diseñados para conjeturar y plantear hipótesis en un ambiente donde los nuevos recursos o TIC tienen un rol protagónico y el estudiante es el que encara la resolución.

En cuanto a las TIC, las asumimos como un recurso más de la clase y no el foco de la actividad matemática. No se trata de destinar una clase entera para trabajar con comandos específicos de un software, sino más bien, integrar las TIC para permitir la creación de una nueva Matemática y el surgimiento de una nueva cultura de aprendizaje. Esto conduciría, además, a cambiar el modo de pensar y actuar en la gestión de la clase, y mucho más importante aún, a conseguir que los estudiantes hagan cosas nuevas en Matemática, logrando tener una educación diferente o mejor gracias a la tecnología.

En estos contextos de diseño de problemas, una conjetura la entendemos como una proposición que tendrá que formular el estudiante y se prevé verdadera, pero que está pendiente de ser sometida a examen (aceptación o rechazo). Si la conjetura es aceptada, debe conducir a procesos de argumentación y validación matemáticos apropiados. Consideramos valioso que cada consigna pueda admitir diferentes posibilidades de exploración y argumentación porque le permitirá al estudiante tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución, recurrir a heurísticas o utilizar distintas habilidades generales matemáticas, reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos, establecer una manera de explicar el porqué de la respuesta y validar las conjeturas que emergen del proceso. Todo este proceso se asimila al trabajo del matemático y legitima el tipo de actividad que se espera realicen los estudiantes cuando aprenden matemática.

Sabemos que una preocupación frecuente de los profesores es la "contextualización de la situación problema", donde se introducen los principales tópicos no matemáticos que la enmarcan. Entendemos que un estudiante debería acceder a estos contenidos buscando información al respecto, lo que implica hacer una selección de las variables adecuadas, la relevancia de las mismas, la exactitud de los datos y la confiabilidad de las fuentes. Si todos los datos son suministrados con el problema, se coarta la formación de estudiantes con pensamiento crítico para la búsqueda de información. Tampoco es lógico pensar que el trabajo de búsqueda de información sea tarea exclusiva del alumno. Lograr que los estudiantes encuentren información adecuada en la maraña de la web no es un trabajo menor para los profesores, pues Internet no puede ser considerado solo como un sitio de consulta.

Teniendo el diseño de un buen problema para la clase de Matemática, sabemos que no es suficiente para que logre desafiar cognitivamente a los estudiantes. Es necesario que se modifique sustancialmente el rol del profesor en la gestión de la clase, lo cual tiene una alta complejidad para que se produzca el cambio, pues implica enseñar de una manera diferente a la que se fue formado. Para ello, sería oportuno que gestione la resolución de cada situación problema teniendo en cuenta los criterios que establecen Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017):

- Ante los cuestionamientos de los alumnos, evitar dar más información que la estrictamente puesta en juego en la pregunta/respuesta del estudiante,
- Intervenir desde la lógica que siguió el estudiante y no desde la que el docente tiene pensada la resolución experta del problema,
- Estimular en el estudiante el desarrollo de estrategias de autocontrol y validación del conocimiento matemático,
- Evitar realizar intervenciones solamente cuando lo que el estudiante hizo está mal,
- Pedir explicaciones incluso cuando la respuesta dada por el estudiante sea correcta.

Como mencionamos, este modo de gestionar la clase tiene por propósito alentar los procesos de argumentación y que los estudiantes puedan conjeturar, demostrar y validar. A su vez, se busca que sea el estudiante quien llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un conocimiento aprendido, buscando trascender las clases tradicionales de Matemática donde el protagonismo lo tiene el profesor a través de clases magistrales.

Consideraciones Finales

Consideramos firmemente que existen otras formas de trabajar y hacer Matemática en el aula, además de la tradicional en la que nos formamos la mayoría de los profesores. Los profesores no aprendemos a desarrollar buenas clases si replicamos malos modelos y, en este sentido, es necesario apoyarnos en los desarrollos de la Didáctica de la Matemática para fundamentar las propuestas de enseñanza y aprendizaje.

Para el diseño de situaciones problemáticas genuinas es necesario tener presente el contexto y los destinatarios de lo que estamos enseñando. Incorporar la modelación matemática en la enseñanza nos aproxima a los campos profesionales de las carreras y no se descuidan los contenidos de Matemática, que suelen ser una preocupación central de los profesores. No obstante, es necesario que nos involucremos en los conocimientos y lógica de otros campos disciplinares, fundamentalmente cuando impartimos clases en carreras no matemáticas o brindamos una formación matemática general.

Por último, el foco de un buen diseño de una buena clase se encuentra en cuestionar el contenido y cómo enseñar, pues ayudará a trascender las clases habituales de Matemática y brindar a los estudiantes otras alternativas de enseñanza y aprendizaje que logren mejorar las vivencias por las que atraviesan en su formación.

Referencias Bibliográficas

Andonegui, M. (2004). Interdisciplinariedad y educación matemática en las dos primeras etapas de la educación básica. *Educere 8(26)*, 301-308.

Barreiro, P.; Leonian, P.; Marino, T.; Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2019/03/9789876302852-completo.pdf

Chavarría, J. e Hidalgo, R. (2009). La historia e interdisciplinariedad en la Educación Matemática: Una experiencia con profesores de secundaria. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4(5)*, 139-154.

CONFEDI (2014). *Competencias en ingeniería*. Mar del Plata, Argentina: Universidad FASTA. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf

INFD (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática.* Buenos Aires: Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaría de Políticas Universitarias.

MECCT. (2019). *Marco nacional para la mejora del aprendizaje en matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/marco_nacional_para_la_mejora_del_aprendizaje_en_matemaetica-digital-ok.pdf

Pochulu, M. (2018). *La modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones*. Universidad Nacional de Villa María - GIDED.

Rodríguez, M. y Barreiro, P. (2018). Modelización y resolución de problemas. En M. Pochulu (Coord.), *La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones (pp. 17-26).* Villa María, Argentina: GIDED - UNVM.

Santaló, L. (1990). *Matemática para no matemáticos.* Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla, España.

SPU (2019). *Convocatoria piloto programa Logros: línea de trabajo Enseñanza de la Matemática (EMA) – Anexo I*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: Secretaría de Políticas Universitarias.

RELACIONES POSIBLES ENTRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y LA INTERDISCIPLINARIEDAD ESCOLAR. UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES DE MATEMÁTICA EN SERVICIO

Avenilde ROMO VÁZQUEZ
Cinvestav, México
avenilde.romo@cinvestav.mx

Resumen

La interdisciplinariedad se ha venido sugiriendo como un enfoque educativo clave en la formación de los futuros ciudadanos y profesionistas, para que sean capaces de enfrentar tareas reales y desafiantes. De la misma manera, otras tareas contemporáneas requieren el uso de saberes de diferente índole, no necesariamente disciplinares, por ejemplo, saberes empíricos o prácticos. Las relaciones entre estos saberes y los escolares pueden ser establecidos a través de la interinstitucionalidad, basada en la consideración de que la escuela y los oficios son instituciones, en el sentido de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). La interinstitucionalidad o la interdisciplinariedad pueden ser consideradas en el diseño de actividades didácticas para la clase de matemáticas, permitiendo a los estudiantes realizar tareas provenientes de contextos reales y relacionar las matemáticas con otros saberes. La integración de estas actividades a la enseñanza, en el corto y largo plazo, requiere de instancias de formación específicas para los docentes de matemáticas. Para ilustrarlo, en esta comunicación, se considera la experiencia de dos cursos implementados en el marco de un programa de maestría, desarrollado en la modalidad en línea y a distancia, en el que se propuso el diseño de una barda perimetral y la generación de su presupuesto, como actividades de modelización matemática. Los profesores participantes mostraron que la investigación y diferentes consultas a albañiles y arquitectos, posibilita un trabajo sobre los modelos proporcionales con diferentes significaciones, y, sobre todo, enfrentar una tarea que puede resultar benéfica para la comunidad.

Palabras clave: Interdisciplinariedad Escolar - Modelización Matemática - Diseño Didáctico.

Introducción

Los enfoques de enseñanza que pretenden relacionar las matemáticas escolares con las matemáticas que se usan en contextos no escolares, son variados y han venido surgiendo a lo largo de los años. En los inicios de la década de los 80's emergió la matemática realística (Freudenthal, 1983) y en los años posteriores, una diversidad de enfoques sobre la modelización matemática fueron generándose y precisándose (Kaiser, 2020). Más recientemente, se han propuesto los enfoques inter, multi y transdisciplinarios (e.g., Jao & Radakovic, 2018; Sriraman & Freiman, 2011). Asimismo, se han desarrollado un gran número de investigaciones sobre el estudio del rol de las matemáticas en ciertos oficios, como la carpintería (Millroy, 1992), la albañilería (Giménez, 2016), la costura (Castela & Elguero, 2013) e incluso de prácticas ancestrales como la construcción de la vivienda maya (Covián & Romo, 2014). Esas investigaciones han evidenciado que las matemáticas desarrolladas y utilizadas en estas actividades se relacionan estrechamente con saberes de otra índole: carpintería, albañilería, costura y construcción de vivienda tradicional. Asimismo, estos trabajos han evidenciado la importancia de reconocer y caracterizar las relaciones entre saberes de diferente índole, y han cuestionado la pertinencia de llevar estas actividades a la clase de matemáticas. ¿En qué medida el desarrollo de tareas similares a las analizadas puede ser relevante en la formación de los futuros ciudadanos? ¿Qué transposiciones son posibles y bajo qué paradigmas educativos? ¿Qué aporta a los estudiantes el reconocimiento de la diversidad de saberes existentes y las formas de relacionarlos? Estas cuestiones han motivado el desarrollo de otras investigaciones en las que se ha considerado el enfoque interdisciplinar e interinstitucional para diseñar actividades didácticas par la clase de matemáticas (e.g., Rodríguez & Romo-Vázquez, 2021; Ruíz-Rojas, Romo-Vázquez & Solares-Rojas, 2020). La diferencia entre estos enfoques radica en la naturaleza de los saberes que se relacionan. Si los saberes son disciplinares, provenientes de al menos dos disciplinas, entonces se puede establecer una relación interdisciplinar, cuya validez está determinada por cierta institución, en el sentido de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), como se específica en la siguiente sección. Por ejemplo, existen conocimientos matemáticos que se han integrado a disciplinas de ingeniería, adaptándose a las normas y reglas de validación propias de la ingeniería, pero manteniendo sus validaciones matemáticas. Es decir, las transposiciones efectuadas preservan las validaciones matemáticas, complementándolas con validaciones de la ingeniería. Por supuesto, el análisis de las transposiciones y la determinación de la naturaleza de estos saberes no necesariamente llega a consensos, como lo ilustran los trabajos de Heaviside, en los que la naturaleza matemática de sus aportes, generados a partir de la resolución de tareas de ingeniería, fue cuestionada por diversos matemáticos (Lützen, 1979). Lo que resulta cierto es que los saberes circulan entre diferentes instituciones y que, en efecto, sufren adaptaciones que modifican en cierta medida su naturaleza (Castela, 2016). Si esta circulación se da entre instituciones disciplinares, se caracterizan como interdisciplinares, combinación de múltiples disciplinas académicas en una sola actividad, trascendiendo los límites disciplinarios (Sriraman y Freiman, 2011). Por otra parte, si las relaciones se establecen entre instituciones no disciplinares, como los oficios, y disciplinares, como las matemáticas, entonces las relaciones entre estos saberes pueden caracterizarse como interinstitucionales. Generar diseños didácticos interdisciplinares o interinstitucionales y difundirlos entre profesores de matemáticas, como una instancia para posibilitar su integración en la enseñanza de las matemáticas, puede enmarcarse en la TAD y en el paradigma del Cuestionamiento del Mundo, como se muestra a continuación.

Elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

La teoría antropológica de lo didáctico ofrece un modelo epistemológico para el análisis de la actividad humana en su dimensión institucional (Chevallard, 1999, 2019). Las instituciones, I, son concebidas como organizaciones sociales estables que ofrecen a sus sujetos recursos materiales e intelectuales para enfrentar de manera eficaz situaciones problemáticas. Existen diferentes tipos de instituciones, académicas, comunitarias, profesionales, que enmarcan las actividades humanas y las hacen posibles. La praxeología permite el análisis de las actividades humanas a partir de sus cuatro componentes, tipo de tarea T, técnica τ, tecnologías θ, y teorías Θ. El tipo de tarea es lo que se hace, la técnica es la forma en que se hace, las tecnologías corresponden a discursos que permiten producir, explicar y justificar las técnicas, mientras que las teorías constituyen discursos más generales, que, a su vez, producen, justifican y explican las tecnologías. Las praxeologías producidas en determinada institución, I, pueden ser transpuestas a otra institución, lo que implica modificarlas para adaptarlas a la institución de destino, I'. Por ejemplo, las praxeologías matemáticas académicas son objeto de una transposición didáctica para convertirse en praxeologías escolares (Chevallard, 1991). De la misma manera, es posible generar una praxeología insterinstitucional al considerar elementos de praxeologías de dos instituciones distintas. Por ejemplo, se puede considerar la institución enseñanza de las matemáticas EM y una institución que produce conocimientos de otra índole, *I*'. El modelo praxeológico de procesos transpositivos correspondiente puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left[T^I, \tau^I \begin{matrix} \theta^I & \Theta^I \\ \theta^m & \Theta^m \end{matrix}\right] \begin{matrix} \leftarrow I \\ \leftarrow EM \end{matrix}$$

En Ruíz-Rojas et al. (2020) se consideró a la albañilería como *I* y el tipo de tarea T^I: diseño de una barda perimetral, cuya realización requería el uso de modelos matemáticos proporcionales (θ^I), que pueden corresponderse con los de la enseñanza de las matemática (θ^m).

Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

Dentro de la TAD se ha definido el paradigma del cuestionamiento del mundo, que a diferencia del paradigma de la "visita de las obras" en el que los conceptos y técnicas matemáticas se estudian como obras terminadas, se enfoca en el estudio de cuestiones abiertas e investigables (Chevallard, 2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) son dispositivos didácticos que posibilitan el estudio de cuestiones generatrices *C*, generando nuevas cuestiones y sub-cuestiones *Ci*, cuyas respuestas existentes $R_i^{\blacklozenge}$, asociadas a conceptos, son parte del medio didáctico *M*, constituido por todos los recursos que se utilizan para estudiar *C* y producir $R^{\heartsuit}$, una respuesta con *sentido propio,* es decir, distinta a la que aparece en las fuentes de difusión (Bosch & Gascón, 2007).

Los REI pueden ser representados por el esquema herbartiano: $[S(X,Y,C) \Longrightarrow M] \rightarrow R^{\heartsuit}$. Y de forma más detallada: $\left[S(X;Y;C) \rightarrow \left\{R_1^{\blacklozenge}, R_2^{\blacklozenge}, R_3^{\blacklozenge}, \dots, R_n^{\blacklozenge}, C_{n+1}, \dots, C_m, O_{m+1}, \dots, O_p\right\}\right] \rightarrow R^{\heartsuit}$. Donde *S* representa el sistema didáctico, constituido por *X*: el grupo de estudiantes o aprendices, *Y*: el guía o los guías que conducen el proceso de estudio y *C*: la cuestión de estudio, la cual 'fabrica' el medio *M* a partir de recursos existentes o creados, de lo cual se genera una consecuencia denominada $R^{\heartsuit}$. Es decir, se asume que un proceso de investigación siempre abre perspectivas para ser continuado. El estudio de *C* puede ser analizado mediante un mapa de cuestiones y respuestas C-R, que evidencie el proceso seguido por la comunidad de estudio (Barquero et al., 2018).

Recorridos de Estudio e Investigación para la formación de profesores, REI-FP

En el caso de la formación de profesores de matemáticas en servicio, las cuestiones *C* pueden ser de dos tipos: profesionales y de investigación. Las cuestiones profesionales son las que emergen en la práctica docente, ¿cómo diseñar actividades de modelización matemática para la clase de geometría analítica?, ¿cómo superar las dificultades relativas en la enseñanza del lenguaje algebraico? Por su parte, las preguntas de investigación provienen de investigaciones de la matemática educativa, y que no son necesariamente reconocidas por los profesores como elementos que inciden en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, ¿cuáles son las prácticas lingüísticas de la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundaria?, ¿cómo se genera un modelo epistemológico de la interdisciplinariedad escolar? Estas preguntas pueden dan lugar a un REI-FP, instancia de formación, y al mismo tiempo, pueden permitir integrar un REI como dispositivo didáctico que puede ser experimentado por los profesores.

Elementos Metodológicos

Diseño del REI-FP "Diseño de una barda perimetral"

En Ruiz-Olarría (2015) se generó una metodología de diseño de los REI-FP para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, a partir de una cuestión profesional, considerando cinco etapas generales: 1) vivir, como estudiante, una propuesta innovadora de actividad matemática; 2) analizarla y adaptarla para su implementación en el aula; 3) experimentarla con sus alumnos de secundaria, bachillerato o universidad; 4) identificar las restricciones institucionales que la experimentación ha puesto en evidencia y 5) refinar o rediseñar la actividad. Estas etapas fueron consideradas en el diseño de diferentes cursos para una formación profesionalizante (e.g., Barquero et al., 2018). Con base en estas fases se generó un REI-FP, cuya pregunta profesional fue ¿cómo adaptar una propuesta didáctica interinstitucional para la clase de matemáticas?

Etapa 1. Vivir el REI interinstitucional "Diseño de una barda perimetral"
Etapa 2. En esta etapa se propusieron varias actividades: 1) generar un primer análisis del recorrido experimentado a partir de identificar las preguntas abordadas y las respuestas propuestas; 2) leer y analizar el artículo de investigación (Ruíz-Rojas et al., 2020) en el que se presenta un análisis de las praxeologías de albañilería y el desarrollo del REI experimentado en la etapa 1; 3) identificar la praxeología interinstitucional que refleja la

investigación desarrollada en la etapa 1; 4) generar una adaptación del REI interinstitucional "Diseño de una barda perimetral" con el objetivo de ser implementada con sus estudiantes; 5) generar un análisis a priori, considerando un mapa de cuestiones y respuestas C-R, susceptible de ser desarrollado por los estudiantes y 6) comparar los análisis a priori con tres profesores, con el objetivo de precisarlos.

Etapa 3. Implementar el REI interinstitucional adaptado "Diseño de una barda perimetral" y generar un reporte de la implementación.

Etapa 4. Generar un análisis a posteriori e identificar restricciones institucionales. La etapa 5 no se consideró.

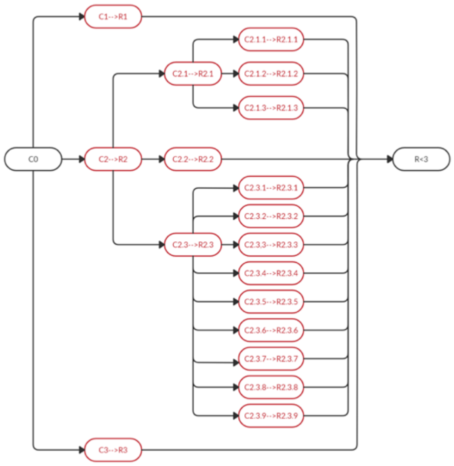
Curso de Profesionalización Docente

El curso tuvo lugar en dos módulos implementados en el Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México. Este programa se ofrece en la modalidad en línea y a distancia a profesores de matemáticas en servicio de diferentes regiones geográficas de México y de Latinoamérica, que laboran en distintos niveles educativos: secundaria, bachillerato y universidad; su formación y su nivel de experiencia docente pueden ser muy variados. Esta heterogeneidad es considerada en el diseño de los cursos, proponiendo actividades que puedan ser desarrolladas de acuerdo a las características específicas de cada participante, y aporten al trabajo colectivo una mirada propia que enriquece la de los compañeros y viceversa.

Los módulos tuvieron una duración de cuatro semanas cada uno y fueron desarrollados en la plataforma Moodle del programa, en la que se habilitaron foros, se compartieron recursos digitales y también se mantuvo una comunicación vía correo electrónico, y en algunos casos vía WhatsApp. El primer módulo fue impartido en noviembre del 2020 y el segundo en marzo-abril del 2021. Cada módulo estuvo conformado por cuatro actividades. En el primero las actividades estuvieron referidas a las etapas 1 y 2, mientras que, en el segundo, las actividades se relacionaron con las etapas 3 y 4, presentadas anteriormente. Los participantes que estuvieron en los dos módulos fueron ocho profesores de secundaria y de bachillerato, de México y de Uruguay. El primer módulo estuvo a cargo de tres educadores o guías, Arturo Ruíz, quien diseñó el REI "Diseño de la barda perimetral", investigador en formación y que ha sido profesor de Telesecundaria en México, y dos profesores del programa. El segundo módulo estuvo a cargo de los dos últimos. Los tres educadores participaron en el diseño de las actividades y durante la implementación del primer módulo generaron un análisis *in vivo* que permitía evidenciar el avance y adaptar las actividades propuestas de acuerdo a ello. Un primer análisis de las actividades del módulo 1, permitió precisar las actividades del segundo módulo.

Una mirada a la inter-institucionalidad como elemento clave en la adaptación del REI

Estos dos módulos constituyeron una experiencia de formación, que permitió poner a prueba el diseño del REI-FP "Diseño de una barda perimetral", y particularmente el "*milieu*" ofrecido a los profesores para generar relaciones entre saberes matemáticos con los de albañilería. Dentro de los elementos ofrecidos en el *milieu*, se encontraban el artículo Ruíz-Rojas et al. (2020), en el que se ofrecía un análisis de praxeologías de albañilería, basado principalmente en una entrevista a un albañil experto y una tabla de análisis del REI en la debían identificar: preguntas derivadas, fuentes de consulta, respuestas preexistentes, respuestas propuestas a las preguntas derivadas y respuesta final. Esta experiencia de enfrentar la tarea de diseñar una barda perimetral y de recurrir a diferentes fuentes (páginas web, tiendas de materiales, videos de arquitectos, etc.) para identificar la forma y las medidas de la barda, el tipo de materiales, la mano de obra, los costos, y el tiempo de construcción, permitió a los profesores identificar elementos de la albañilería que debían ser investigados para determinar el diseño y sobre todo el presupuesto de la barda. Por ejemplo, el equipo conformado por los profesores Carlos y Alejandro, uruguayo y mexicano, presentaron un mapa de cuestiones y respuestas (figura 1) en la que identificaron tres preguntas iniciales: *C1*. ¿Qué es una barda?, *C2*. ¿Cómo se construye una barda perimetral? Y *C3*. ¿En qué terreno se construirá la barda? Las preguntas derivadas de *C2*, fueron las que les permitieron generar elementos para el presupuesto: *C2.3. 4*. ¿Qué materiales necesitamos para construir una barda?, *C2.3.5*. ¿Cuánto necesitamos de cada material? Y *C2.3.6*. ¿Cuánto cuesta cada material? La respuesta que se ofrece a la pregunta *C2.3.5*, es la tabla que aparece en la figura 1b., en la que se puede observar los tipos de materiales considerados y el modelo que permite calcular el presupuesto, considerar el precio unitario del material y multiplicarlo por la cantidad de material necesario. Se puede notar que en este momento, los profesores no consideran el costo de la mano de obra, ni los tipos de personal requerido, maestro albañil, albañil, chalan. Por otra parte, ellos experimentan la necesidad de colocar distintas unidades, m^2, m^3, kg, pero no aparece ninguna reflexión sobre el porqué ha sido importante colocarlas. Tampoco aparece alguna reflexión sobre el modelo proporcional y la forma en que podría ser abordado en el aula.

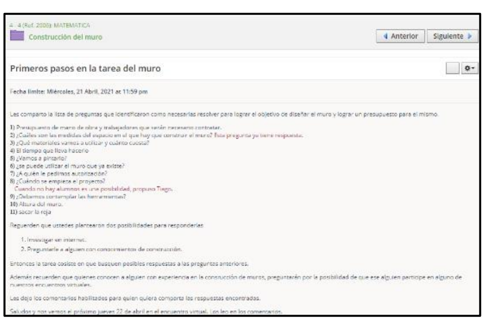


Material	Unidad	Cantidad de unidades	Costo unitario ($)	Costo total ($)
Bloques	Unidad	2231	5.70	12 716.7
Varillas de 3/8 pulgada (12m)	Unidad	80	118	9 440
Varillas de 5/8 pulgada (12m)	Unidad	146	377.59	55 128.14
Cemento para mortero	kg	1274 (26 costales)	138.02	3 588.52
Cemento para vigas y columnas	kg	4 606.875 (93 costales)	174.02	16 183.86
Arena	m^3	11.431 (12)	160	1 920
Agua	L	3 209.25	0	0
Cal	kg	637 (26 sacos)	59.35	1 543.1
Grava	m^3	11.0565 (12)	250	3 000
Mano de obra	m2	293 *	426	124 818
Renta de manera para encofrado	m2	30	50	1 500
			Total:	229 838.32

Figura 1a. Mapa de C-R del equipo 4. *Figura 1b.* Presupuesto de la barda, equipo 4.

A partir de esta misma actividad, es posible observar que estos profesores privilegiaron en sus fuentes de consulta, los videos de Global Invent (e.g., https://www.youtube.com/watch?v=kU1GIY1WgSc), aunque también realizaron entrevistas a dos albañiles, a quienes les propusieron una tarea específica: determinar cuántos bloques, sacos de cemento y varillas son necesarias para la construcción de una barda de 50 *m* lineales, modificando la consigna del REI, que era de 90 *m* lineales. En la actividad 4, primera adaptación del REI para ser implementada con sus estudiantes, el profesor Carlos especificó entre los objetivos: "es esperable que durante el recorrido de estudio y de investigación que experimenten los estudiantes, sientan la necesidad de recurrir a los contenidos que se detallan en la unidad 4: "proporcionalidad y porcentajes" (CES, 2010). El saber escolar involucrado en la actividad está considerado entre los que deben ser enseñados.

El REI adaptado mantuvo la pregunta original, pero adaptada a una situación propia de la escuela: "*Con el fin de lograr un espacio más seguro para estacionar las bicicletas en nuestro liceo, se está evaluando la posibilidad de sustituir la reja que limita el sector de la biblioteca por un muro construido por un material más sólido y seguro.Así es que, les solicitamos que elaboren el diseño y presupuesto para construir un muro que sustituya la reja perimetral del sector de la biblioteca, para presentar al equipo institucional y la A.P.A.L. (asociación de padres amigos del liceo). El proyecto generado debe tener los elementos base para que se puedan tomar decisiones adecuadas en bien de nuestra institución. Por ello, es importante que haya claridad y justificaciones que sustenten la propuesta elaborada*". Asimismo, el profesor Carlos generó un curso en línea que favoreció un trabajo individual, en pequeños grupos y en gran grupo. Generó pcuatro preguntas iniciales, que en la primera sesión ya tenían preguntas derivadas (figura 2a) y favoreció un trabajo de investigación, que además de las fuentes propuestas, alcanzó a las familias de los estudiantes, como se ilustra en la imagen 2b, en la que el equipo 2 evalúa el desarrollo del REI.



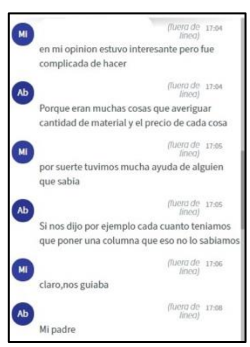


Figura 2a. Cuestiones propuestas por el grupo. *Figura 2b.* Opiniones de los estudiantes.

De manera general, el REI "Diseño de una barda perimetral", surgido de una necesidad particular de una escuela Telesecundaria en México, tiene potencialidad didáctica, tanto para evidenciar el rol de un modelo proporcional al determinar un presupuesto, como para ilustrar la forma en que ciertos saberes del contexto deben ser considerados. Los estudiantes del profesor Carlos solicitaron en su escuela la construcción del muro y sustentaron su petición, con un diseño y con un presupuesto que podía ser considerado seriamente. En el caso de otros profesores, la situación fue adaptada para beneficiar a la comunidad, por ejemplo, considerando la posibilidad de construir una barda perimetral para una residencia de adultos mayores. Para el diseño de estos REI es crucial el análisis de las instituciones involucradas, ingresando a sus lógicas para establecer praxeologías interinstitucionales.

Referencias Bibliográficas

Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, *50*(1-2), 31-43. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-zZDM

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Anthropological foundations of didactic organizations: from "Mathematical Practices Workshops" to "Study and Research Trails". In A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, & C. Ladage (Eds.), Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de déconnaissance et d'action (pp. 55-91). IUFM de l'Académie de Montpellier.

Castela, C., & Elguero, C. (2013). Praxéologie et institution, concepts clés pour l'anthropologie épistémologique et la socioépistémologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *33*(2), 79–130.

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática*, *28*(2), 8–29. http://www.revista-educacion-matematica.com/descargas/Vol28-2.pdf

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. H*iroshima Journal of Mathematics Education*, *12*, 71-114.

Covián, O. & Romo, A. (2014). Las matemáticas en la construcción: la vivienda maya, el levantamiento y trazo topográfico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática. 28*(48), 128-148. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a07

Giménez, D. (2016). Estudio de una práctica de colocación de pisos cerámicos desde una perspectiva de la educación matemática. *Decisio*, *45*, 19-24.

Jao & Radakovic (Eds.) (2018). *Transdisciplinarity in mathematics education. Blurring disciplinary boundaries.* Springer.

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education (2nd ed.) (pp. 553–560). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Lützen, J. (1979). Heaviside's operational calculus and the attempts to rigorise it. *Archive for History of Exact Sciences*, *21*(2), 161–200. https://doi.org/10.1007/BF00330405

Millroy, W. (1992). An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph number 5.

Ruiz Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España

Ruíz-Rojas, A., Romo-Vázquez, A., & Solares-Rojas, A. (2020). Proyecto de construcción de una barda escolar: Un dispositivo didáctico interinstitucional para Telesecundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 18,* 119-135. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.280

Sriraman, B. y Freiman, V. (2011). *Interdisciplinarity for the twenty-first century: Proceedings of the Third International Symposium on Mathematics and Its Connections to Arts and Sciences, Moncton 2009*. IAP, Information Age.

SISTEMAS DINÁMICOS, CAOS Y GEOGEBRA PARA MODELAR ALGUNOS FENÓMENOS

Viviana Angélica COSTA
IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de La Plata
Argentina
vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen

Esta conferencia se sustenta en mostrar un sistema dinámico discreto que modela matemáticamente diversos fenómenos. Tal sistema, para algún parámetro del mismo, exhibe un comportamiento caótico que puede simularse utilizando GeoGebra. El objetivo es mostrar que con herramientas simples del software y conocimientos matemáticos de los primeros cursos universitarios y/o de los últimos años de la escuela media, es posible acercar a los estudiantes a aspectos básicos de esta rama de la matemática contemporánea.

Palabras clave: Modelo - Sistema Dinámico - Mapa Logístico – Caos - GeoGebra.

Introducción

Los *sistemas dinámicos,* estudian el cambio de una o más variables en relación al tiempo. Este cambio se representa en forma de ley o ecuación, y el objetivo es hallar el valor de las variables en el dominio temporal.
Si este dominio es discreto, estamos trabajando en el ámbito de la dinámica discreta, representadas por ecuaciones en diferencias; si, por el contrario, el dominio temporal es continuo en un intervalo real (acotado o no acotado), estamos trabajando en dinámica continua, representada por ecuaciones o sistemas diferenciales.
Estos sistemas son una herramienta útil para *modelar matemáticamente* un sinfín de fenómenos o situaciones en distintos campos: biológicos, económicos, físicos y sociales, entre otros.
Esta es una parte de la *matemática contemporánea,* que ha avanzado en sus investigaciones en virtud del avance de la tecnología que permite simular, en el caso de sistemas dinámicos, el comportamiento de las variables en el tiempo y analizar los cambios que se producen.
En esta línea de ideas en este escrito se presenta un sistema dinámico discreto, el *mapa logístico*, que según sea el valor del parámetro existente en el mismo, puede presentar diversos comportamientos que permiten construir la denominada ruta al *caos.*
El objetivo de presentar este *mapa*, es mostrar que puede proponerse su estudio en la escuela secundaria y primeros cursos de matemática universitaria, ayudándose de un modo muy sencillo con el software GeoGebra para simular el comportamiento de la variable en el tiempo. De este modo, se adelantaría la enseñanza de aspectos básicos de la Teoría del Caos y de dinámicas complejas, que en general son relegados a cursos avanzados o de posgrado. Esto acercaría a los estudiantes a una matemática más actual, según mencionan: Seoane, Zambrano y San Juan (2008) y Wenzelburger (1992).
Además, el mapa logístico *modela* diversos problemas reales de un modo simple, por lo cual su estudio incorporaría tareas de *modelización matemática*. Acción que es destacada por diversos autores, entre estos, por Bosch, García, Gascón e Higueras (2006), Pochulu (2018) y Blomhøj (2008).

Sistemas dinámicos discretos

Los *sistemas dinámicos discretos* se escriben matemáticamente mediante ecuaciones en diferencias y son conocidos como *mapeos iterativos o relaciones recursivas,* o simplemente *mapas*. Los mapas unidimensionales son de la forma:

$$x_{n+1}=f(x_n), \text{ con } x_0 \text{ valor inicial}$$

y evolucionan en el tiempo por el proceso de iteración, en el que el siguiente estado del sistema es determinado por su estado actual. Iterando el algoritmo se genera una sucesión de valores reales: $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de la que interesa conocer su comportamiento. Esta secuencia o sucesión es conocida como *órbita* que se inicia en x_0 y donde se cumple que:

$$x_n=f(x_{n-1})=f(f(x_{n-2}))=\ldots.. = f^n(x_0)$$

Las aplicaciones iteradas son fácil y rápidamente simuladas en computadoras, en las que el tiempo es inherentemente discreto. Tales experimentos revelan un número de patrones inesperados, que a su vez han estimulado nuevos desarrollos teóricos. Sorprendentemente, las aplicaciones iteradas han generado una cantidad de predicciones con éxito sobre las rutas al caos en semiconductores, fluidos convectivos, células cardíacas, láseres y oscilaciones químicas.

Mapa Logístico

Consideremos en particular el *mapa logístico* dado por la fórmula recursiva siguiente:

$$x_{n+1} = r.\, x_n .(1 - x_n), \quad x_0 \text{ condición inicial}, \quad r\text{: parámetro positivo}$$

Esta aplicación fue introducida por primera vez por Pierre F. Verhulst en 1845 y popularizada en un artículo de 1976 por el físico Robert May, como análoga en tiempo discreto a la ecuación diferencial logística para el crecimiento de una población. En su artículo, May enfatizó que incluso aplicaciones no lineales simples pueden presentar dinámicas muy complejas.
El *mapa logístico* es interesante porque reúne, en un solo sistema unidimensional y dependiente sólo de un parámetro, r, un abanico de comportamientos diversos para las trayectorias x_n cuando se varía el valor del mismo y de x_0. Además, estos comportamientos se encuentran en muchos otros sistemas discretos, con lo cual se dice que sus características dinámicas son universales en ese sentido. Ejemplos de esos rasgos son la sensibilidad a las condiciones iniciales, la ruta al *caos* por duplicación de período o el fenómeno de la intermitencia.
Una de las aplicaciones de este mapa, es la de *modelizar el crecimiento de una población* en un área cerrada. El parámetro r representa la fertilidad y demás influencias externas. La variable representa la fracción de

individuos de la población que puede ser sustentado en un tiempo dado. Esto quiere decir que los valores de la variable pueden variar entre 0 (ausencia de individuos) y 1 (existencia de tantos individuos como sea posible) (Mindlin, 2008). Esto se explica del siguiente modo: la fórmula contiene dos términos, x_n y (1-x_n). Al crecer x_n, el término (1-x_n) disminuye, y se acerca a 0 (la población disminuye). Para un x_n, muy pequeño, el valor (1-x_n) está muy cerca de 1. En otras palabras, estos dos términos funcionan en oposición, pues uno intenta extender la población y el otro reducirla.

Este simple *mapa* también puede *modelar* el problema conocido como *transformación del panadero*. Con los puños, el panadero estira la masa y la pliega sobre sí misma, repitiendo esta acción una y otra vez. Esta transformación desplaza puntos contiguos de la masa, alejándolos unos de otros, en cada paso (iteración). Una serie de hilos elásticos situados en la masa eventualmente se estirarán y plegarán formando un patrón complejo e imprevisible, y por tanto caótico.

Matemáticamente, este proceso de estiramiento y plegamiento conduce a formar un atractor extraño. La *transformación del panadero* se rige entonces por el mismo dinamismo de dos efectos opuestos, el factor de estiramiento (x_n) y el factor de plegamiento (1–x_n).

Otro fenómeno que modela el *mapa logístico* es al que los entomólogos han recurrido para computar el efecto de las plagas en los huertos y los genetistas lo usan para calibrar el cambio de frecuencia de ciertos genes en una población. También este *mapa* modela la forma en que se difunde un rumor: al principio un rumor se expande exponencialmente hasta que casi todos lo han oído. Luego la tasa decae velozmente, a medida que cada vez más personas dicen: "Ya lo conozco". Además, es posible de aplicar este mapa a las teorías del aprendizaje. Lo que se aprende ahora está relacionado con la cantidad de información incorporada anteriormente. El aprendizaje primero aumenta, pero al cabo de un tiempo se satura, de modo que los nuevos esfuerzos sólo producen resultados mínimos (Briggs y Peat, 1989).

Otro mapa muy sencillo de simular que presenta diversos comportamientos según el valor inicial es el *mapa shift decimal*, que para un valor real x_0 entre 0 y 1, el valor siguiente es $x_{n+1} = 10x_n \ (mod\ 1)$. En cada iteración el valor anterior se multiplica por 10 (“se estira como la masa”) y luego se le calcula su módulo 1, es decir se toma su parte decimal (“se pliega”). Es fácil observar que se puede elegir el valor inicial, para que la sucesión generada sea estable, periódica del período que se quiera y/o caótica.

Todos estos *mapas*, muestran una característica para lograr el comportamiento caótico que se vincula con la acción de “estirar” y luego “plegar”, en cada paso o iteración durante todo el proceso.

Simulaciones usando GeoGebra

Exploramos el *mapa logístico* usando GeoGebra, sus diferentes Vistas y herramientas, para descubrir sus múltiples comportamientos y la ruta al *caos*. Acordamos acotar el parámetro *r* para valores entre 0 y 4. El objetivo es analizar ¿*Cuáles son los valores para los cuales la población se estabiliza en el tiempo, se extingue o es inestable*?

Para comenzar, una forma simple de observar la evolución de la variable, es graficar los puntos (n,x_n) en el plano cartesiano, realizar las iteraciones para distintos valores de x_0 y de r, colocando en el eje de las abscisas la variable $n=0,1,2,3,...$ y en el eje de ordenadas los valores de x_n. Para esto, en GeoGebra, es posible generar las iteraciones en la Hoja de Cálculo. En una columna se ingresan los valores de *n*. Luego, en la Vista Gráfica un deslizador que se corresponde con la condición inicial (es optativo), otro deslizador para *r* restringido a valores entre 0 y 4. En otra columna se generan los valores de $f(x_n)$. Luego se crea una Poligonal con las columnas A y B, que se corresponden con los pares (n, x_n), que se visualizan en la Vista Gráfica. Animando los deslizadores para *r* y para la condición inicial, se observan los distintos comportamientos de la variable en el tiempo.

En las Figuras 1, 2 y 3, se muestran algunas capturas de pantalla, con x_0=0.8 y 50 iteraciones, donde se observan los distintos comportamientos de la variable (estable, periódico e inestable), que conducen a la denominada ruta al *caos*.

Otra forma de realizar estos gráficos es creando primero una l1=Secuencia(0,50), un deslizador *r* con valores de 0 a 4, con incremento de 0.001, luego l2=ListaIteración(r x (1 - x), 0.8, 50), y luego los pares ordenados con las listas creadas l3=(l,l2), finalmente, Poligonal(l3).

Además, para dos condiciones iniciales cercanas $x_0=0.8$ (roja) y $x_0=0.801$ *(azul)*, se itera y se observa la separación, en el tiempo, entre los correspondientes valores de cada sucesión (Figura 4).

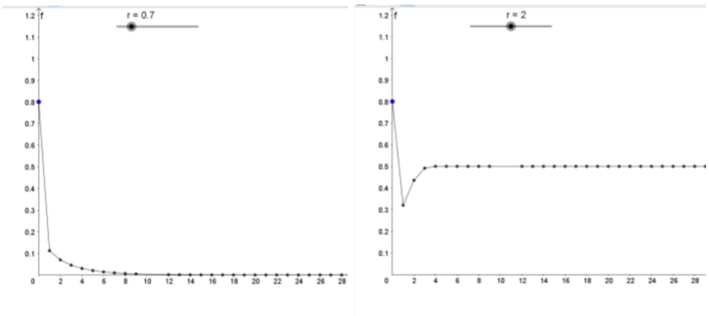


Figura 1. Mapa logístico para r=0.7 (estable, converge a cero) y para r=2 (estable converge a 0.5).

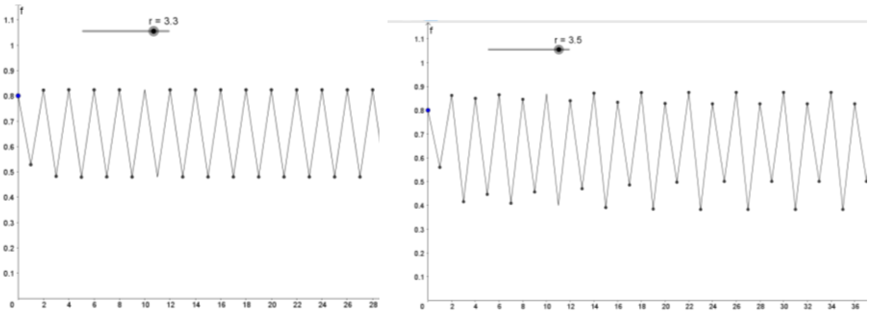


Figura 2. Mapa logístico para r=3.3 (periódico con período 2) y para r=3.5 (periódico con período 4).

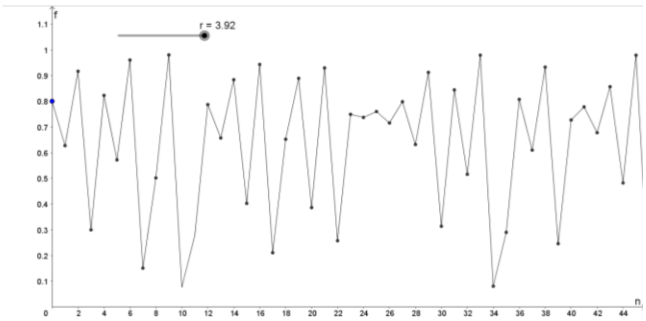


Figura 3. Mapa logístico para r=3.92 (caos).

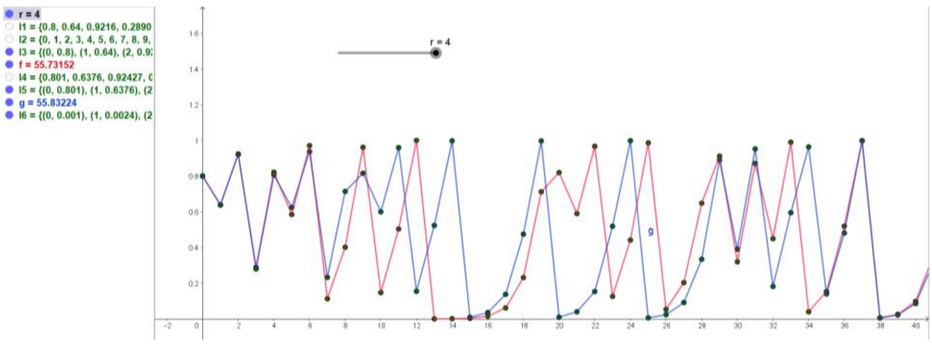


Figura 4. Mapa logístico, r=3.92 (caos). Simulación de dos sucesiones, con condiciones iniciales cercanas.

Estas primeras simulaciones pueden ayudar a observar los variados comportamientos de la variable que modela el *mapa logístico*. Pero para dar precisiones matemáticas, es necesario recurrir a un estudio analítico de los *mapas discretos*. Para esto, siguiendo a Strogatz (2014), una forma de analizar los mapas es buscar los *puntos fijos* x^*, que verifiquen la igualdad: $f(x^*)=x^*$. Entonces si para algún $x_n= x^*$, entonces la sucesión se estabiliza en ese valor. Para el mapa logístico, los *puntos fijos* que se obtienen de realizar el cálculo $x^*=r.x^*.(1-x^*)$, son:

- Si $0 \leq r < 1$, hay un único punto fijo, $x^*=0$.
- Si $r > 1$, hay dos puntos fijos, $x^*=0$ y $x^*=(r-1)/r$.

Luego, si se considera una órbita cercana al punto fijo, es decir, $x_n = x^* + e_n$ y nos preguntamos si es atractiva o repulsiva al punto fijo para *n* creciendo, y utilizando desarrollos de primer orden por Taylor, se deduce que:

- Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es un punto fijo estable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces x^* es un punto fijo inestable.
- Si $|f'(x^*)| = 1$ hay que considerar para el análisis el término del error.

Para el *mapa logístico*, por ejemplo si $r=3$, hay dos puntos fijos, $x^*=0$ y $x^*=2/3$, y las derivadas en esos puntos son respectivamente $f'(0)=2$ y $f'(2/3)=4/3$, mayores a 1, lo cual indica que son inestables.

Otros conceptos de interés, que permiten analizar el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico son: determinar las *órbitas k-periódicas* (puntos p del mapa que verifican que $f^k(p)=p$), estimar el *Exponente de Lyapunov* (medida de la separación exponencial de dos órbitas para condiciones iniciales próximas, indica caos cuando este valor es positivo) y realizar el *Diagrama de Bifurcaciones* (gráfico de utilidad para encontrar los valores del parámetro para los cuales hay duplicaciones de periodos, regularidades y presencia de caos).

Utilizando las diversas herramientas y Vistas que dispone GeoGebra es posible realizar los cálculos mencionados para el estudio analítico y las gráficas correspondientes. Esto se observa en la Figura 5, en la que se observan, la Vista Algebraica, Vista CAS, Vista Gráfica, para los cálculos de los puntos fijos y análisis de estabilidad, gráfica de los pares (x_n, x_{n+1}) y Diagrama de Bifurcaciones.

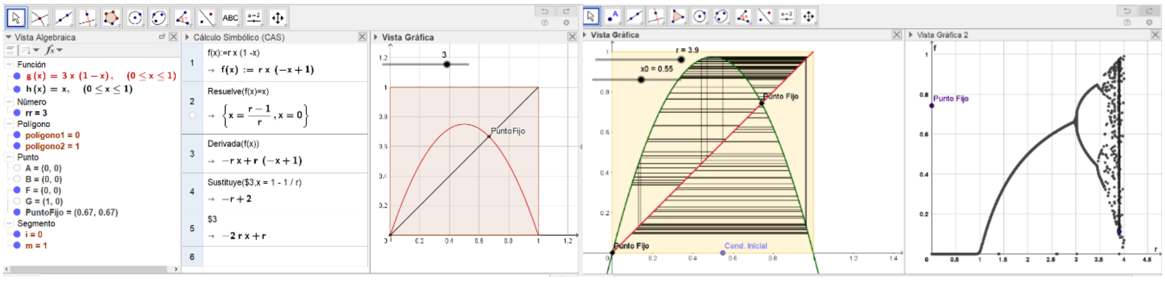


Figura 5. Estudio del *mapa logístico* con GeoGebra.

Conclusiones

En este trabajo se presentaron aspectos básicos de los *sistemas dinámicos discretos* en una variable, en particular el *mapa logístico*, que exhibe diversos comportamientos: estable, periódico y caótico. Además, se mencionaron diversos fenómenos que podrían ser modelados mediante este *mapa.* Se mostraron simulaciones realizadas en GeoGebra. Este software resulta ideal para ello, ya que ofrece una variedad de Vistas y de herramientas de muy simple uso. También se describieron brevemente algunos aspectos para realizar un estudio más profundo del comportamiento del *mapa* que sólo requiere de conocimientos básicos del Cálculo Diferencial en una variable real y del concepto de algoritmos iterativos que generan sucesiones numéricas. Se concluye que, sería posible proponer en primeros cursos de matemática universitaria y/o últimos años de la escuela media aspectos básicos de la Teoría del Caos, aportando al estudiantado herramientas para modelar, descubrir, simular, explorar y comprender sistemas no lineales y complejos de diversas ciencias: económicos, bilógicos, sociales y educativos, entre otros, acercándolos a una matemática más actual.

Referencias Bibliográficas

Blomhøj, M. (2008). Modelización matemática-una teoría para la práctica. Revista de educación matemática, 23(2), 20-35.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Higueras, L. R. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. Educación matemática, 18(2), 37-74.

Briggs, J., & Peat, F. D. (1989). Espejo y Reflejo. Del caos al orden. Guía ilustrada de la teoría del caos y la ciencia de la totalidad. Gedisa Ed, 15.

Mindlin G. (2008). Ciencia que ladra... serie clásica. Causas y azares. La historia del caos y de los sistemas complejos. Editorial Siglo 21.

Pochulu, M. (2018). La modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones. Villa María: GIDED.

Seoane, J. M., Zambrano, S., & San Juan, M. A. (2008). Teaching nonlinear dynamics and chaos for beginners. Latin-American Journal of Physics Education, 2(3), 10. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2734630.pdf

Strogatz, S. H. (2014). Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Westview press.
Wenzelburger, E. (1992). La matemática contemporánea y su papel en la enseñanza del nivel medio superior. Educación Matemática, 4(02), 55- 60. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-2/vol4-2-5.pdf

IMPLICACIONES DE LA MODELACIÓN EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL

Jesús Guadalupe LUGO-ARMENTA
Universidad de Los Lagos, Chile
jesus.lugo@ulagos.cl

Resumen

Los recientes cambios en los planes y programas de los currículos de matemáticas han incorporado el uso de recursos tecnológicos y especialmente a la modelación como una característica destacada en eje de Probabilidad y Estadística. Es por ello, que en esta conferencia se pretende, por una parte, brindar un panorama de la modelación en la estadística para lo cual se describe cómo la modelación se ha incorporado en la enseñanza de la Estadística y algunas características y ejemplificaciones de su uso para promover el razonamiento inferencial. Por otra parte, se presentan practicas que realizan profesores de matemáticas de educación media en formación al resolver actividades de inferencia estadística y, se aborda cómo los profesores en formación podrían desarrollar o fortalecer su razonamiento inferencial incorporando actividades con modelación. Dentro de estas actividades de modelación se hace énfasis en las simulaciones y las técnicas de remuestreo. Destacamos la comparación de grupos por medio pruebas de aleatorización, razones de probabilidad, probabilidad codicional, distribuciones de muestreo, relaciones entre múltiples variables y las desviaciones de los datos observados al modelo. Para llevar a cabo este tipo de actividades los recursos tecnológicos, como software y applets, se vuelven un componente clave dentro del aula de clases. También destacamos cómo las actividades de modelación pueden motivar a los estudiantes en el aprendizaje de la Estadística y ser utilizadas para fundamentar inferencias informales y promover el razonamiento inferencial.

Palabras clave: Modelación - Modelo Estadístico - Enseñanza de la Inferencia Estadística – Razonamiento Inferencial.

Introducción

En los últimos años hemos observado como los currículos de matemáticas han incorporado la modelación para promover nociones estadísticas, probabilísticas y en especial de inferencia estadística, por ejemplo, para destacar la aleatorización. En el currículo de matemáticas de Chile, desde séptimo básico (12-13 años) se espera que los estudiantes simulen y construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias que les permitan inferir sobre características de la población para resolver problemas. El enfoque que se pretende en este nivel educativo esta centrado en la visualización de los datos estadísticos (Mineduc, 2015). Mientras que en la educación media se contempla que los estudiantes puedan realizar inferencias fundamentadas en técnicas basadas en la distribución normal y la t-Student y con el uso de software o tecnologías digitales; para lo cual es necesario que los estudiantes modelen fenómenos de diversos ámbitos (e.g., situaciones cotidianas, científicas y sociales) que requieran utilizar las distribuciones de probabilidad y el calculo de probabilidades. En general se espera que los estudiantes sean capaces de utilizar las distribuciones de probabilidad como modelos de fenómenos de diversos contextos (Mineduc, 2019).

La estadística se encarga de recopilar información, analizar y representar los datos para dar respuesta a problemas reales, así como para realizar inferencias sobre el comportamiento de determinados fenómenos; a pesar de su importancia, diversas investigaciones han reportado las dificultades que presentan los estudiantes cuando trabajan con nociones de Probabilidad y Estadística y especialmente de Inferencia Estadística (e.g., Batanero, Vera y Díaz, 2012; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Harradine, Batanero y Rossman, 2011). Bakker y Derry (2011) señalan que uno de los principales problemas a los que nos enfrentamos los educadores de estas disciplinas es que las nociones se suelen enseñar de forma aislada, tanto unas de otras como de los contextos de los cuales subyacen. Esta forma de enseñanza contrasta con la necesidad de que los estudiantes comprendan profundamente y de forma holística los diversos conceptos y propiedades, por ejemplo, aquellos que se encuentran involucrados en las pruebas de hipótesis. Por otra parte, Batanero (2001) hace un llamado a reconocer que la enseñanza de la estadística debe ser considerada como una actividad de modelación y no como un conjunto de procedimientos y teoremas matemáticos que se aplican de forma mecánica. Mientras que Pfannkuch, Ben-Zvi y Budgett (2018) señalan que la modelación puede ser implementada en la enseñanza de la estadística proporcionando criterios para la selección de contenidos y el diseño e implementación de actividades que vayan más allá de la memorización y de los algoritmos. En este sentido, podríamos hacer uso de la modelación como una estrategia didáctica para abordar objetos matemáticos en el aula de clase.

Antes de profundizar sobre modelación en estadística es importante preguntarnos qué es la modelación, y para responder podemos recurrir a Lesh y Doerr (2003), quienes la definen como un proceso de desarrollo de herramientas conceptuales, compatibles, modificables y reutilizables para describir, predecir y controlar situaciones reales; su interés se centra principalmente en que los estudiantes puedan desarrollar formas creativas y flexibles de pensar, que les permita solucionar problemas reales a los que se pueden enfrentar fuera de la escuela y que guardan relación con los objetos matemáticos que están estudiando. Por otra parte, desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) proponen que toda la actividad matemática se puede identificar con una actividad de modelación, es decir, podemos trabajar modelación tanto con problemas en contexto de la vida real como en contexto intra-matemático. La modelación se ha definido desde diversas perspectivas o visiones, pero coinciden en el énfasis que realizan sobre la utilidad de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. En la modelación matemática se han propuesto diversos ciclos o pasos que van guiando la modelación en la enseñanza de las matemáticas (Biembengut y Hein, 2004; Kaiser ySriraman, 2006; Borromeo-Ferri, 2010).

Modelación en Estadística

Así como existen diversas perspectivas de modelación matemática, en Estadística también se tienen variadas perspectivas para trabajar la modelación en el aula. A continuación, describiremos algunas perspectivas que han sido utilizadas en las investigaciones de Educación Estadística.

Wild y Pfannkuch (1999), en la segunda dimensión, definen a la modelación como un tipo de pensamiento a la cual recurrimos para construir modelos y utilizarlos para comprender y predecir el comportamiento de fenómenos del mundo que nos interesan. A medida en que vamos avanzando en la investigación estadística generamos modelos basados en la información que obtenemos del contexto (datos estadísticos), así mediante la modelación aprendemos sobre la realidad del contexto. En la construcción de modelos estadísticos se ponen en juego nuestras concepciones de las nociones estadísticas y nuestras experiencias estadísticas, dicha construcción nos permite interpretar la realidad y predecir el comportamiento.

Otra perspectiva sobre la modelación en estadística es proporcionada por Cobb (2007) quien releva la importancia del papel de la modelación en la enseñanza de la estadística, señalando que los métodos estadísticos se derivan de un modelo y, además, la importancia de promover el pensamiento estadístico a través del razonamiento entre el modelo y la realidad. Por su parte, Garfield y Ben-Zvi (2008) hacen énfasis en dos procesos de la modelación en estadística (1) seleccionar, diseñar y utilizar modelos para simular datos y dar respuesta a la pregunta de investigación. En este primer proceso, podemos trabajar con modelos simples, usando datos existentes, recopilando nuevos datos mediante una encuesta o un experimento (por ejemplo, como producto de una hipótesis) y simulando los datos (para lo cual podemos considerar un modelo existente que se ajuste a los datos). (2) Ajustar un modelo estadístico a los datos existentes o recogidos, este proceso nos permite valorar si el modelo estadístico se ajusta al problema o fenómeno de estudio y a examinar las desviaciones del modelo.

Desde la perspectiva de Lehrer y English (2018) cuando modelamos planteamos preguntas estadísticas dentro de contextos que sean significativos y resaltamos la variabilidad; generamos, seleccionamos y medimos atributos que cambian en razón de las preguntas realizadas; recolectamos datos para tomar decisiones sobre el diseño de las investigaciones; representamos e interpretamos la variabilidad muestral; y, hacemos inferencias informales de los procesos teniendo presente la incertidumbre, identificando variaciones y realizando predicciones.

Aunque cada una de las perspectivas de modelación en Estadística que hemos descrito presenta particularidades, también podemos destacar puntos de encuentro. Al trabajar con la modelación en Estadística buscamos modelar los datos recogidos, observados o preexistentes reconociendo la inherente aleatoriedad. Para dicha modelación de los datos, se suele partir de un problema y construir un modelo inicial con base en la muestra o experimento y posteriormente trabajar con un modelo preestablecido. En este tipo de modelación estamos explorando el comportamiento del modelo, por ejemplo, qué sucede si variamos los parámetros de la distribución, cómo se comporta dicha distribución.

La Modelación en el desarrollo del Razonamiento Inferencial

De acuerdo con Cobb y Moore (1997) “la practica estadística se asemeja a un dialogo entre el modelo y los datos”. En esta sección abordaremos cómo se ha incorporado la modelación para promover el desarrollo del razonamiento inferencial, algunas practicas que han desarrollado los profesores al resolver problemas de inferencia, destacando las dificultades en las mismas y cómo la modelación podría ayudar con dichas dificultades.

Comencemos con un poco de historia, en los inicios del estadístico y la distribución t-Student, Gosset llevó a cabo un estudio Monte Carlo usando datos reales para mostrar el ajuste de su distribución por medio de la ecuación teórica $y = \frac{2}{\pi}\cos^4\theta\,, z = \tan\theta$ a los datos que reales que tenía en las tarjetas (Student, 1908). De acuerdo con Zabell (2008), la simulación que realizó Gosset fue una de las primeras que existieron y de las pocas que se llevaron a cabo antes de 1927, año en el cual las denominadas “computadoras humanas” realizaron la tabla de números aleatorios. Así como Gosset realizó tales simulaciones, hoy en día en las clases de estadística se intenta aproximar a los estudiantes a las distribuciones, a comprender y valorar la variabilidad, por mencionar algunos ejemplos, mediante simulaciones, especialmente con las técnicas de remuestreo (o bootstrapping).

En la inferencia informal, Rossman (2008) identificó algunos conceptos claves, si bien concibe que “la inferencia requiere ir más allá de los datos disponibles” (p. 5), al realizar una inferencia estadística plantea a la variabilidad aleatoria como fundamental; esto es debido a que la valoración de la variabilidad es el rasgo distintivo y formalmente esto se lleva a cabo mediante un modelo de probabilidad adecuado. Otras investigaciones también han trabajado con modelos de probabilidad tanto para favorecer el razonamiento inferencial informal como para justificar las inferencias informales (e.g., Doerr, delMas y Makar, 2017; Kazak y Pratt, 2017). Además, de los conceptos claves en la inferencia informal, Rossman (2008), también propuso actividades escolares para el nivel universitario, actividades en las que es necesario trabajar con elementos como azar, recolección de datos, modelos de probabilidad, simulación de muestras e inferencia, para responder preguntas con la posibilidad de utilizar en ello alguna estimación subjetiva, empírica o prefigurada del p-valor involucrado, lo que dé el matiz de informal.

Harradine, Batanero y Rossman (2011), señalan la importancia de la inferencia estadística y retoman algunos caminos alternativos propuestos en diversas investigaciones para introducir a los estudiantes en tales tópicos, mencionan que “una característica constante de la inferencia informal es que se sugieren actividades para envolver a los estudiantes en el proceso de razonamiento de la inferencia estadística sin depender de distribuciones de probabilidad y fórmulas” (p. 243). Para llevar a los estudiantes a este tipo de razonamiento se suelen auxiliar de simulaciones donde los estudiantes pueden visualizar el fenómeno y extraer conjeturas; así como en dicha investigación proponen el uso de simulaciones con recursos tecnológicos para promover el RII, otras investigaciones también proponen el uso de estos recursos, específicamente con simulaciones y applets (e.g., Rossman, 2008; Batanero y Díaz, 2015).

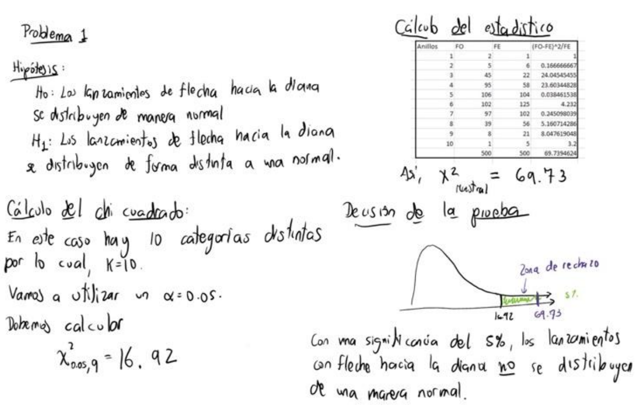
Por lo que refiere a Batanero y Díaz (2015), consideran el razonamiento inductivo implicado en una inferencia estadística, señalando que la inferencia en sí, es "generalizar lo observado en casos particulares (la muestra) a algo más general (la población)" (p. 136), esto se ve complementado por una validación de esta generalización sustentada en el uso de la probabilidad. Entonces, de acuerdo con estas autoras puede ser considerada una inferencia estadística sólo si la inferencia incluye una validación probabilística. Para ejemplificar su planteamiento, Batanero y Díaz (2015) muestran cómo sería una aproximación informal al contraste de hipótesis, una propuesta que "trata de introducir algunas ideas principales y el razonamiento del contraste y, a la vez, liberar al alumno de los cálculos asociados, recurriendo a la simulación" (p. 141); ideas como muestra y población, media muestral y poblacional, distribución de la media muestral, hipótesis nula y valor-p. De acuerdo a lo anterior argumentan que, la simulación (en vez del cálculo formal) puede utilizarse al comenzar la enseñanza del contraste de hipótesis para poder concentrar al alumno en el aprendizaje de la lógica del proceso y en los conceptos que, todavía necesita: muestra y población, media muestral y poblacional, distribución de la media muestral, hipótesis nula, valor-p.

Riemer y Seebach (2014), también proponen trabajar con simulaciones para la validación de hipótesis, ellos proponen una forma de trabajar la validación de hipótesis por medio de datos reales, donde primero se investiga por simulación, luego por cálculo de probabilidad, después compara las expectativas con los datos reales y, finalmente, los resultados de las 'pruebas de hipótesis'. Estos investigadores señalan que, si las desviaciones son demasiado grandes, se debe dudar de la validez de la hipótesis y en consecuencia rechazarla.

Asimismo, siguiendo con las propuestas que incluyen recursos tecnológicos, Dinov, Palanimalai, Khare y Christou (2018) realizaron una aplicación web de aleatorización y remuestreo, la cual se puede utilizar para el análisis de datos, así como para el aprendizaje y la enseñanza formal de diversas nociones, por ejemplo, el muestreo, variación aleatoria, y en general la inferencia estadística asistida por computadora y realizar análisis basado en datos.

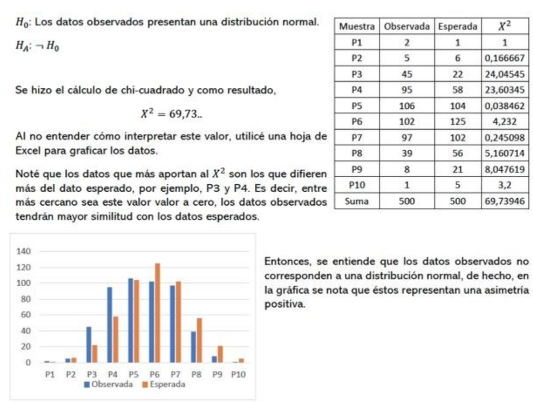
En la propuesta de niveles progresivos de razonamiento inferencial de Lugo-Armenta y Pino-Fan (2021) se sugiere que para conocer y comprender las distribuciones de probabilidad y las relaciones entre algunas de ellas (e.g., las distribuciones Chi-cuadrada, t-Student y normal) la enseñanza se apoye en recursos tecnologicos, por ejemplo, generando simulaciones.

Como podemos observar, en las investigaciones que hemos descrito previamente, para promover el razonamiento inferencial se han apoyado en la modelación, principalmente trabajando con simulaciones que permitan generar modelos a partir de los datos observados, con el remuestreo, el cual nos permite validar modelos y estimar una distribución muestral generando varios modelos a partir de una muestra original; con el uso de software o applets que nos posibilitan visualizar graficamente cómo varía una distribución al modificar los parámetros, cómo se relacionan los errores tipo I y tipo II, el valor-p, la significancia y el nivel de confianza. Seguidamente, se presentan las practicas que realizan profesores de matemáticas de enseñanza media para dar respuesta a situaciones-problema de inferencia estadística.



Anillos	FO	FE	(FO-FE)^2/FE
1	2	1	1
2	5	6	0.166666667
3	45	22	24.04545455
4	95	58	23.60344828
5	106	104	0.038461538
6	102	125	4.232
7	97	102	0.245098039
8	39	56	5.160714286
9	8	21	8.047619048
10	1	5	3.2
	500	500	69.7394624

Figura 1. Práctica del profesor en formación 5

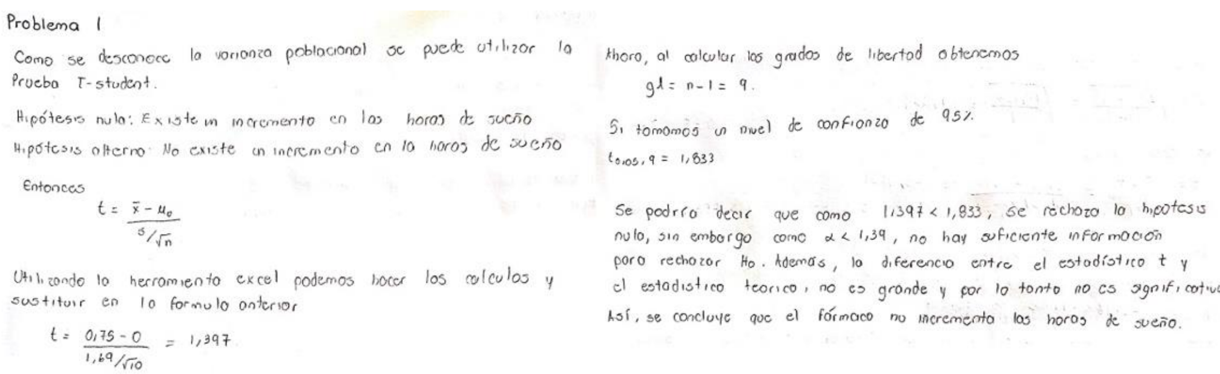


Muestra	Observada	Esperada	X^2
P1	2	1	1
P2	5	6	0,166667
P3	45	22	24,04545
P4	95	58	23,60345
P5	106	104	0,038462
P6	102	125	4,232
P7	97	102	0,245098
P8	39	56	5,160714
P9	8	21	8,047619
P10	1	5	3,2
Suma	500	500	69,73946

Figura 2. Práctica del profesor en formación 21

La práctica del profesor en formación 5 (ver Figura 1) es de Nivel 4 –razonamiento inferencial formal–, sin embargo, aún podría fortalecer su razonamiento inferencial formal explorarando los errores tipo I y tipo II y comprendiendo las relaciones entre dichos errores, el nivel de significancia y la potencia de la prueba. De forma similar a la propuesta de Rossman (2008), para la comprensión de la distribución o el valor-p, los niveles de razonamiento inferencial proponen que para promover las propiedades/proposiciones de los errores tipo I y tipo II, nivel de significancia y la potencia de la prueba, así como las relaciones entre estas, se puede auxiliar de software, simulaciones y representaciones gráficas. El profesor en formación 5 podría iniciar con una aproximación informal al valor-p, auxiliándose de software para simulaciones o para el cálculo de la probabilidad del estadístico Chi-cuadrada (Nivel 2), y con ello apoyar su inferencia.

La práctica del profesor en formación 21 (ver Figura 2) se caracteriza en el Nivel 2 –razonamiento inferencial preformal–, en dicha práctica se resalta que el profesor reconoció el uso del estadístico Chi-cuadrada para resolver el problema, pero tuvo dificultades para concluir la prueba de hipótesis. Para que el profesor transite a un siguiente nivel de razonamiento inferencial podría obtener el valor de la probabilidad para el estadístico que ha calculado e interpretarla como una medida de ocurrencia de un complejo sistema de n errores que ocurren con una frecuencia tan grande o más grande que la del sistema observado. Para realizar esto es necesario que el profesor conozca la distribución Chi-cuadrada y comprenda sus propiedades, podría iniciar con applets de simulaciones para visualizar cómo se comporta esta distribución al variar su parámetro, los recursos tecnológicos ayudan a los estudiantes y profesores a interactuar con las nociones estadísticas, lo cual favorece la comprensión de dichas nociones.



Problema 1

Como se desconoce la varianza poblacional se puede utilizar la Prueba T-student.

Hipótesis nula: Existe un incremento en las horas de sueño
Hipótesis alterna: No existe un incremento en la horas de sueño

Entonces

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Utilizando la herramienta excel podemos hacer los calculos y sustituir en la formula anterior

$$t = \frac{0{,}75 - 0}{1{,}69/\sqrt{10}} = 1{,}397$$

Ahora, al calcular los grados de libertad obtenemos

$$gl = n - 1 = 9.$$

Si tomamos un nivel de confianza de 95%.

$$t_{0{,}05,9} = 1{,}833$$

Se podría decir que como $1{,}397 < 1{,}833$, se rechaza la hipotesis nula, sin embargo como $\alpha < 1{,}39$, no hay suficiente información para rechazar Ho. Además, la diferencia entre el estadístico t y el estadistico teorico, no es grande y por lo tanto no es significativo

Así, se concluye que el fármaco no incrementa las horas de sueño.

Figura 3. Práctica del profesor en formación 8

La práctica del profesor 8 (ver Figura 3) es de Nivel 3–razonamiento inferencial preformal–, en la cual destacamos que comete un error cuando va a trabajar con el criterio de decisión del valor-p, por consiguiente, podría iniciar la comprensión del valor-p con una aproximación informal, auxiliándose de software para simulaciones o para el cálculo de la probabilidad del estadístico t-Student, y con ello apoyar su inferencia.

Reflexiones Finales

A lo largo de este documento hemos observado que hay distintas formas de entender el uso de la modelación en la enseñanza de la Estadística. Las distintas perspectivas o enfoques modulan los objetivos y la metodología de trabajo de modelación en el aula. Queremos destacar el uso de los recursos tecnológicos y en especial con las simulaciones, los cuales ayudan a los estudiantes y profesores a interactuar con las nociones estadísticas, esto favorece la comprensión de dichas nociones, tal y como lo señalan Rossman y Chance (2014); y cómo las actividades con simulaciones pueden motivar a los estudiantes a aprender e involucrarse en la situación problema planteada. A veces, se utiliza un conjunto de datos para simular más datos, creando una distribución de población simulada para utilizarla en la elaboración de inferencias estadísticas. En otras actividades, se inicia la exploración de la idea de probabilidad condicional mediante applets, pues esto les permitirá a los estudiantes o profesores en formación experimentar diferentes posibilidades de forma visual. También se podría trabajar con la comparación de grupos por medio de pruebas de aleatorización y razones de probabilidad.

En los cursos avanzados de inferencia estadística, la modelación de los datos es una técnica indispensable para explorar las relaciones entre múltiples variables, examinar el ajuste de un modelo a los datos observados y las desviaciones de los datos del modelo. Pero como hemos descrito, la modelación también puede ser utilizada para fundamentar inferencias informales y promover el razonamiento inferencial.

Asimismo, podemos mencionar que los modelos nos permiten representar situaciones problema reales y éstas nos brindan un contexto a los objetos matemáticos; así pues, la modelación es una forma de contextualizar, acercar y generar interés en la estadística y fomentar habilidades con el uso de tecnología en nuestros estudiantes, por mencionar algunas bondades.

Finalmente, consideramos que la implementación de la modelación en la promoción del razonamiento inferencial permite mejorar las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, dejando de lado los conceptos abstractos, fórmulas y algoritmos que no van en sintonía con el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, interpretación del contexto de la realidad, la comprensión de las nociones de inferencia estadística y el desarrollo del razonamiento inferencial.

Referencias Bibliográficas

Bakker, A., & Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 5-26. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538293

Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, modelización, simulación. *Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, 119-130.

Batanero, C., & Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, (2), 135-144.

Batanero, C., Vera, O. D., & Díaz, C. (2012). Dificultades de estudiantes de Psicología en la comprensión del contraste de hipótesis. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *80*, 91-101.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, *16*(2), 105-125.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 99-118.

Cobb, G. W. (2007). The introductory statistics course: A Ptolemaic curriculum?. *Technology innovations in statistics education*, *1*(1).

Dinov, I. D., Palanimalai, S., Khare, A., & Christou, N. (2018). Randomization-based statistical inference: A resampling and simulation infrastructure. *Teaching Statistics*, *40*(2), 64-73. https://doi.org/10.1111/test.12156

Doerr, H. M., delMas, R. & Makar, K. (2017). A modeling approach to the development of students' informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *16*(2), 86-115.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Dordrecht: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4020-8383-9

Harradine A., Batanero C., Rossman A. (2011). Students and Teachers' Knowledge of Sampling and Inference. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading (Eds.) *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 235-246). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_24

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. Zdm, *38*(3), 302-310.

Kazak, S., & Pratt, D. (2017). Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game. *Statistics Education Research Journal*, *16*(2).

Lehrer, R., English, L. (2018). Introducing Children to Modeling Variability. En D. Ben-Zvi, K. Makar, J. Garfield (eds) International Handbook of Research in Statistics Education. Springer International Handbooks of Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_7

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (eds.) Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahawah, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Lugo-Armenta, J. G., & Pino-Fan, L. R. (2022). Niveles de Razonamiento Inferencial para el Estadístico t-Student. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*, 1776-1802.

Ministerio de Educación de Chile [Mineduc]. (2015). *Bases Curriculares 7º y 2º medio*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile [Mineduc]. (2019). *Bases Curriculares 3º y 4º medio*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., & Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. ZDM, 50(7), 1113-1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Riemer, W. & Seebach, G. (2014). Rolling pencils - inferential statistics in the pencil case. En *Understanding more mathematics with GeoGebra* (pp. 91-105). Heidelberg: Springer Spektrum.
Rossman, A.J. (2008). Reasoning about Informal Statistical Inference: One Statistician's View. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 5-19.
Rossman, A. J., & Chance, B. L. (2014). Using simulation-based inference for learning introductory statistics. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, *6*(4), 211-221. https://doi.org/10.1002/wics.1302
Student. (1908). The probable error of a mean. *Biometrika, 6*(1,)1-25. https://doi.org/10.2307/2331554
Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–248.
Zabell, S. L. (2008). On student's 1908 article "the probable error of a mean". *Journal of the American Statistical Association*, *103*(481), 1-7. https://doi.org/10.1198/016214508000000030

LAS DESIGUALDADES INTEGRALES EN CONTEXTO

Juan Eduardo NÁPOLES VALDES
UNNE-FaCENA y UTN-FRRE, Argentina
profjnapoles@gmail.com

Resumen

Para funciones convexas sobre [a,b] (ver [1] para un panorama amplio sobre diversas extensiones y ampliaciones del concepto original), una de las desigualdades más importantes es la de Hermite-Hadamard:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Esta desigualdad ha atraído la atención de los investigadores en las últimas décadas y se ha apreciado un aumento del número de publicaciones referidas a ella, este desarrollo se ha dado en cuatro direcciones fundamentales:

1) Con nuevas nociones de convexidad.
2) Utilizando diferentes operadores integrales.
3) Definiendo funcionales, que permitan obtener nuevos estimados de $f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ o de $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
4) Utilizando una malla más refinada, es decir, en lugar de considerar a y b, tomar otros nodos en el intervalo.

En esta conferencia haremos un recorrido por una de las áreas más dinámicas de la Matemática actual y mostraremos varias direcciones de trabajo, perfectamente delimitadas y algunos problemas abiertos.

Referencias

[1] J. E. Nápoles Valdes, F. Rabossi, A. D. Samaniego. CONVEX FUNCTIONS: ARIADNE'S THREAD OR CHARLOTTE'S SPIDERWEB? Advanced Mathematical Models & Applications Vol.5, No.2, 2020, pp.176-191.

El PENSAMIENTO VISUAL EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO EN LA ESCUELA

Osvaldo Jesús ROJAS VELÁZQUEZ
Universidad Antonio Nariño, Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

La geometría del espacio constituye un área de la matemática con múltiples aplicaciones en los contextos, los cuales son una fuente para la resolución de problemas extra-matemáticos con los estudiantes. Su proceso de enseñanza aprendizaje en el aula evidencia ciertas dificultades, entre las que se tienen: los estudiantes carecen de las habilidades de representación, visualización e imaginación necesarias para el estudio de los contenidos de la geometría del espacio, además poseen una limitada base conceptual, entre otras. Para contribuir a mejorar esta situación en el salón de clases, se considera oportuno crear un desarrollo adecuado del pensamiento visual, y proponer sobre la base de este pensamiento estrategias didácticas dirigidas a favorecer la enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio en la escuela. La implementación de estas estrategias propicia la construcción de significados de conceptos geométricos, fortalece la búsqueda de relaciones y dependencias en el tema en los estudiantes, y contribuye al desarrollo de la actividad creadora y la independencia cognoscitiva de los estudiantes. Además, propicia caracterizar pensamiento visual y desarrolla el pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.

MATHEMATICAL PROPERTIES ON THE TOPOLOGICAL INDICES

José Luis SÁNCHEZ SANTIESTEBAN
Universidad Autónoma de Guerrero
jlsanchezsantiesteban@gmail.com

Abstract

Topological indices have been widely used in different fields associated with scientific research. They are recognized as useful tools in applied research in Chemistry, Ecology, Biology, Physics, among others.

For many years, scientists have been trying to improve the predictive power of the famous Randi'c index. This led to the introduction and study of new topological descriptors that correlate or improve the level of prediction of the Randi'c index. Among the most commonly used descriptors are the Inverse index, the first general Zagreb index and the recently introduced Arithmetic-Geometric index.

In this work I study the mathematical properties and relationships of the aforementioned topological indices.

ON GENERALIZED DERIVATIVES, THEIR PROPERTIES AND RELATIONSHIP WITH CONVEXITY

Miguel VIVAS-CORTEZ
Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Ecuador
mjvivas@puce.edu.ec

Abstract

Integral Calculus is a mathematical area with so many ramifications and applications, that simple decision to list them makes the task practically impossible. In the case of integral inequalities it is also possible to find in the literature diverse classical inequalities, in many cases related to the convexity of the function involved (for example: Hermite, Hadamard, Ostrowski, Jensen, among others). In recent years there has been a boom in the study not only of integral inequalities, but also in the use of new global and local derivatives, the latter not very accepted by the mathematical community mathematics, as well as generalized differential operators. In this conference, I present recent results of new integral inequalities for functions whose fractional derivative has some kind of generalized convexity.

RESULTADOS RECIENTES DE ANÁLISIS CONFORMABLE

Francisco MARTÍNEZ GONZÁLEZ
Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena
España
f.martinez@upct.es

Resumen

R. Khalil et al. (2014) introdujeron una nueva definición de derivada de orden $\alpha \in (0,1]$, la denominada *derivada conformable.* Esta derivada de orden fraccional se puede encuadrar en las formulaciones de derivadas de tipo local, al estar definida a través de un cierto cociente de incrementos. Además, la derivada conformable resuelve algunos de los inconvenientes que presentaban otras derivadas fraccionales clásicas de tipo no local. Propiedades fundamentales de las derivadas ordinarias, tales como la regla de derivación de productos o cocientes de dos funciones o la regla de la cadena, van a satisfacerse para la derivada conformable. Así mismo, la utilización de esta derivada permite extender de manera natural los principales resultados del Análisis Matemático clásico, a la vez que representa un instrumento muy útil en el ámbito de las aplicaciones en las Ciencias Naturales o en la Ingeniería, por su fácil implermentación. Por estas razones numerosas investigaciones se han desarrollado en los últimos años, en la dirección de extender en el sentido conformable resultados clásicos en el campo del análisis real de funciones de una o varias variables, del análisis complejo, de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias o de ecuaciones en derivadas parciales, de las funciones especiales, entre otros ámbitos. También podemos encontrar en la bibliografía numerosas referencias sobre problemas de la Ciencia o la Técnica, que se han modelizado con éxito a través de la utilización de la derivada conformable. Finalmente, sólo resta indicar que el objetivo de este documento es recoger algunos resultados interesantes que, en este sentido, se han publicado recientemente.

Palabras Clave: Cálculo Fraccional - Derivada Conformable - Integral Conformable - Ecuaciones Diferenciales Conformables - Ecuaciones en Derivadas Parciales Conformables - Análisis Complejo Conformable.

Introducción

La teoría del Cálculo Fraccional es una extensión natural de la derivada clásica, que ha atraído a muchos investigadores debido a sus aplicaciones en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. Desde el punto de vista teórico, las diversas definiciones de derivada fraccional propuestas, están basadas en dos concepciones: global (no local) y local. En la primera concepción la derivada fraccional se define a través de una transformación integral, por lo que su naturaleza es no local y además tiene "memoria". Esta formulación global se asocia con la aparición del Cálculo Fraccional en sí mismo, desde los trabajos pioneros de Euler, Laplace, Lacroix, Fourier, Abel, Liouville,…, hasta el establecimiento de las definiciones que, tal vez, sean más conocidas, como las de Riemann-Liouville y Caputo. Por supuesto, estas definiciones intentan satisfacer las propiedades habituales de la derivada clásica, sin embargo, la única propiedad inherente a dichas definiciones es la propiedad de linealidad. Por el contrario, algunos de los inconvenientes que presentas estas derivadas citadas, se pueden situar en:

(i) La derivada de Riemann-Liouville no satisface $D_a^\alpha(1) = 0$, si α no es un número natural.
(ii) Las derivadas fraccionales propuestas no poseen algunas de las propiedades fundamentales de la derivada clásica, tales como la regla del producto, la regla del cociente o la regla de la cadena.
(iii) Estas derivadas propuestas, en general, no satisfacen $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$.
(iv) La definición de la derivada de Caputo implica que la función f debe ser diferenciable en sentido ordinario.

Más información sobre estas definiciones de derivada fraccional se puede consultar en [1] y [2].
En la segunda concepción de la derivada fraccional, la de tipo local, ésta se formula a través de ciertos cocientes de incrementos. En este sentido, recientemente R. Khalil et al., [3], introducen una nueva definición de derivada, denominada derivada conformable. En esta definición se resuelven algunos de los inconvenientes que presentaban las anteriores derivadas fraccionales. Así, por ejemplo, las mencionadas reglas de derivación de productos y cocientes de dos funciones o la regla de la cadena, son propiedades que satisface la derivada conformable. El sentido físico y geométrico de la derivada conformable es estudiado en [4] y [5]. Elementos fundamentales del Cálculo Conformable de funciones reales de una variable real son introducidos en [6]. En el contexto del análisis matemático de funciones de varias variables, se ha definido el concepto de derivada parcial de orden α o de vector gradiente, a la vez que importantes resultados como el teorema de Clairaut, [7] y [8]. El ámbito de la teoría y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en sentido conformable, también ha focalizado los trabajos de muchos investigadores [9-19].
Finalmente, destacamos otra importante formulación de derivada fraccional de tipo local, la denominada derivada no conformable, que se introduce en [20] y [21]. Esta nueva derivada generaliza la derivada conformable de R. Khalil et al., ya que ésta puede considerarse como un caso particular cuando se toma como núcleo $F(t,\alpha) = E_{1,1}(t^{1-\alpha})$.

Preliminares

En esta sección, vamos a destacar algunos conceptos básicos y resultados fundamentales del Cálculo Conformable, que van a ser necesarios en los desarrollos posteriores.
Definición 2.1. *Dada una función $f\colon[0,\infty) \to R$, se define la derivada de orden α,* [3], *como*

$$(T_\alpha f)(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{1}$$

para todo $t > 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Si f es α-differentiable en algún intervalo abierto $(0,a)$, $a > 0$, y existe $\lim_{t\to 0^+}(T_\alpha f)(t)$, entonces

$$(T_\alpha f)(0) = \lim_{t\to 0^+}(T_\alpha f)(t). \tag{2}$$

Teorema 2.1. [3]. *Si una función $f\colon[0,\infty) \to R$ es α-differentiable en $t_0 > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, entonces f es continua en t_0.*
Teorema 2.2. [3]. *Sea $0 < \alpha \leq 1$ y sean f, g funciones α-difrenciables en un punto $t > 0$. Entonces*

(i) $T_\alpha(af + bg) = a\,(T_\alpha f) + b\,(T_\alpha g)$, $\forall a, b \in R$.

(ii) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha},\ \forall\, p \in R$.

(iii) $T_\alpha(\lambda) = 0$, *for all constant functions* $f(t) =\lambda$..

(iv) $T_\alpha(fg) = f(T_\alpha g) + g(T_\alpha f)$.

(v) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(T_\alpha f)-f(T_\alpha g)}{g^2}$.

(vi) *Si, además,* f *es diferenciable, entonces* $(T_\alpha f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$.

Utilizando la definición anterior, la derivada conformable de ciertas funciones elementales viene dada por:

(i) $T_\alpha(1) = 0$,

(ii) $T_\alpha(sin(at)) = at^{1-\alpha}cos(at)$,

(iii) $T_\alpha(cos(at)) - at^{1-\alpha}sin(at)$,

(iv) $T_\alpha(e^{at}) = ae^{at}$, $a \in R$.

Remark 2.1. Nótese que una función puede ser α-differentiable en un punto, pero no diferenciable. Por ejemplo, tomando $f(t) = 3\sqrt[3]{t}$. Then$\left(T_{\frac{1}{3}}f\right)(0) = \lim_{t\to 0^+}\left(T_{\frac{1}{3}}f\right)(t) = 1$, donde $\left(T_{\frac{1}{3}}f\right)(t) = 1$, para $t > 0$. Sin embargo $\frac{df}{dt}(0)$ no existe.

Teorema 2.3 (Regla de la Cadena). [6]. *Si* $f, g\colon (0,\infty) \to R$ *son funciones* α*-diferenciables, donde* $0 < \alpha \le 1$, *entonces la función* $h(t) = f(g(t))$ *es* α*-diferentiable y se verifica*

$$(T_\alpha h)(t) = (T_\alpha f)\big(g(t)\big)\cdot(T_\alpha g)(t).(g(t))^{\alpha-1}. \tag{3}$$

A continuación, se presenta la definición de la e α-integral de una función f desde $a \ge 0$.

Definición 2.2. $I_\alpha^a(f)(t) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}\cdot dx$, donde la integral es la integral impropia de Riemann usual *y* $\alpha \in (0,1]$, [3].

Finalmente, [7], [8], la derivada parcial conformable de una función real de varias variables reales se define como sigue:

Definición 2.3. *Sea* f *una función real de* n *variables reales y sea* $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_n) \in R^n$ *cuya ith componente es positiva. Entonces el límite*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f\left(a_1,..,a_i+\varepsilon a_i{}^{1-\alpha},\dots,a_n\right)-f(a_1,\dots,a_n)}{\varepsilon}, \tag{4}$$

si existe, se denota por $\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha}f(\boldsymbol{a})$, *y se denomina ith derivada parcial conformable de* f *de orden* $\alpha \in (0,1]$ *en* $\boldsymbol{a}$.

Algunos resultados recientes

En esta sección, se presentan algunos resultados y aplicaciones recientemente publicados en diferentes ámbitos del Análisis Matemático en el sentido de la derivada conformable.

Análisis de funciones reales de una variable real

Teorema 3.1. [22].*Sea* $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{\alpha \in (0,1]}$ *y sea* $\boldsymbol{f}$*una función real de variable real continua en el intervalo* $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. *Sea* $\boldsymbol{G}$ *una función real de variable real con la propiedad* $\boldsymbol{T_\alpha(G)(t) = f(t)}$ *para todo* $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. *Entonces*

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}\cdot dt = G(b) - G(a), \tag{5}$$

Teorema 3.2. [22]. *Sea $a > 0$ y sea $f: [a,b] \to R$ una función que satisface*

- $\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} \cdot dx \; \forall t \in [a,b]$, *existe para algún* $\alpha \in (0,1]$.

- $m \leq f(t) \leq M \; \forall t \in [a,b]$, *para ciertos números* m *y* M.

Entonces existe $\mu \in [m,M]$ *tal que*

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} \cdot dt = \frac{\mu}{\alpha}\left(\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}\right), \tag{6}$$

Corolario 3.1. [22]. Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} \cdot dt = \frac{f(c)}{\alpha}(b^\alpha - a^\alpha), \tag{7}$$

Teorema 3.3. [23]. *Si la serie de potencias* $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^{k\alpha}$ *tiene radio de convergencia* $R > 0$, *entonces* f *es indefinidamente* α *−diferenciable en* $[0,R)$, *y* $c_k = \frac{\left({}^{(k)}T_\alpha\right)(0)}{\alpha^k k!}$.

Teorema 3.4. [23]. *Si la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^{k\alpha}$ *has a radius of convergence* $R > 0$, *entonces:*

(i) *La serie de potencias* α *−integrada* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(k+1)\alpha} t^{(k+1)\alpha}$ *converge para todo* $t_0 \in [0,R)$.

(ii) *Si* $t \in [0,R)$, *se verifica que*

$$\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{k\alpha}\right)\frac{dx}{x^{1-\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t c_k x^{k\alpha}\,\frac{dx}{x^{1-\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{(k+1)\alpha}t^{(k+1)\alpha}$$

Ecuación Conformable de Airy

Se considera la siguiente ecuación diferencial conformable de Airy, [23]:

$$\left({}^{(2)}T_\alpha\; y\right)(t) - \alpha^2 t^\alpha y(t) = 0, \tag{8}$$

donde $\alpha \in [0,1)$. Si α =1, entonces la ec. (8) es la clásica ecuación diferencial de Airy, que tiene muchas aplicaciones en la teoría de la difracción. $t = 0$ es un punto ordinario de la ec. (8). En tal caso, usando el método de las series de potencias, se puede obtener la solución general de dicha ecuación:

$$y(t) = c_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3k-2)(3k-5)\dots 1}{(3k)!}t^{3k\alpha}\right) + c_1\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3k-1)(3k-4)\dots 1}{(3k+1)!}t^{(3k+1)\alpha}\right)$$

Análisis de funciones de una o varias variables reales

En este apartado se presentan nuevos resultados sobre el Cálculo diferencial conformable de funciones de varias variables, que completan el estudio realizado en [7] y [8].

Teorema 3.5. (Teorema Conformable de Euler para funciones homogéneas). [24]. *Sea* $\alpha \in (0,1]$ *y sea* f *una función real de* n *variables reales definida en un conjunto abierto* D, *tal que* $(tx_1,\dots,tx_n) \in D$ *cuando* $t > 0$ *y* $(x_1,\dots,x_n) \in D$, *con cada* $x_i > 0$. *Asumiendo que* $f \in C_\alpha(D,R)$, *entonces* f *es una función homogénea de grado* r *si, y sólo si,*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \cdot \frac{\partial^\alpha f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i^\alpha} = rf(x_1,\dots,x_n), \forall (x_1,\dots,x_n) \in D, \tag{9}$$

Teorema 3.6. (Primera fórmula conformable de los incrementos finitos). [25]. sean $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,\dots,a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,\dots,b_n) \in R^n$, $\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{x_1},\dots,\boldsymbol{x_n}$ puntos $\boldsymbol{x_i} = \left(b_1,\dots,b_i,a_{i+1},\dots,a_n\right)$ (notar que $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{x_n} =$

$\boldsymbol{b}$) y un segmento $S_i = [\boldsymbol{x_{i-1}}, \boldsymbol{x_i}]$, for $i = 1,2,\dots,n$. Sea $\alpha \in (0,1]$ y sea $f: X \to R$ una función real real definida en un conjunto abierto $X \subset R^n$ que contiene los segmentos $S_1, S_2, \dots, S_n$, tal que para todo $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$, cada $x_i > 0$. Si la derivada parcial conformable de f con respect a x_i, existe en X, entonces existe un punto c_i entre a_i y b_i, para $i = 1,2,\dots,n$, tal que

$$f(b_1, b_2, \dots b_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i{}^{\alpha}}{\alpha} - \frac{a_i{}^{\alpha}}{\alpha} \right) \cdot \frac{\partial^{\alpha} f(b_1, \dots, b_{i-1}, c_i, a_{i+1} \dots, a_n)}{\partial x_i^{\alpha}} \tag{10}$$

,

Teorema 3.6. (Teorema conformable de la función implícita para el caso de una sola ecuación*)*. [26]. *Sea $\alpha \in (0,1]$ y sea $F: X \to R$ una función real definida en un conjunto abierto $X \subset R^{n+1}$, tal que para todo $(x_1, \dots, x_n, y) \in X$, cada $x_i, y > 0$, y el punto $(a_1, \dots, a_n, b) \in X$. Supongamos que*

(i) $F(a_1, \dots, a_n, b) = 0$
(ii) $F \in C_{\alpha}(X, R)$
(iii) $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} F(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$

Entonces existe un entorno, $U \subset R^n$, de $(a_1, \dots, a_n)$ tal que existe una única función $y = g(x_1, \dots, x_n)$ que satisface:

$$g(a_1, \dots, a_n) = b \;\; y \;\; F\big(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)\big) = 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

Finalmente, $y = g(x_1, \dots, x_n)$ es C_{α} en U, y para cada $i = 1,2,\dots,n$, tenemos

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x_i^{\alpha}} g(x_1, \dots, x_n) = - \frac{\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x_i^{\alpha}} F\Big((x_1, \dots, x_n), g\big((x_1, \dots, x_n)\big)\Big)}{\frac{\partial^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} F\Big((x_1, \dots, x_n), g\big((x_1, \dots, x_n)\big)\Big) \cdot g\big((x_1, \dots, x_n)\big)^{\alpha - 1}}. \tag{11}$$

En [26] también podemos encontrar el enunciado y la demostración del Teorema General de la función implícita en sentido conformable.

Análisis Complejo

En relación al análisis complejo fraccional, una teoría de las funciones analíticas en sentido conformable se desarrolla en [27] y [28]. Además, la definición de la integral conformable a lo largo de un contorno y sus primeras propiedades se introduce en [29].

Teorema 3.7. [29]. *Supongamos que una función $f(z)$ es continua en un dominio $D \subset C - (-\infty. 0]$. Si cualquiera de estas afirmaciones es verdadera, lo son también las demás.*

(i) *$f(z)$ tiene una α −antiderivada $F(z)$ en D.*

(ii) *Las α −integrales de $f(z)$ a lo largo de contornos contenidos en D que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor.*

(iii) *Las α −integrales de $f(z)$ a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en D tienen todas valor cero.*

Teorema 3.8. [29]. *Sea $\boldsymbol{f}$ una función $\boldsymbol{\alpha}$ −analítica en un conjunto abierto $\boldsymbol{\Omega} \subset \boldsymbol{C} - (-\infty. \boldsymbol{0}]$ y sea $\Delta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ un triángulo de vértices $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ contenido en $\boldsymbol{\Omega}$. Entonces $\int_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]} \boldsymbol{f(z)} \frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{z^{1-\alpha}}} = \boldsymbol{0}$.*

Teorema 3.9. (Teorema de Cauchy Conformable para un dominio en forma de estrella). [29]. *Todas las funcionesl α −analíticas en un dominio en forma de estrella tienen α −antiderivadas en este dominio.*

Teorema 3.10. (Teorema Conformable de Morera*)*. [29]. *Para una función continua $f: \Omega \to C$ en un conjunto abierto $\Omega \subset C - (-\infty. 0]$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es α −analítica en Ω.*

(ii) $\int_{[a,b,c,a]} f(z) \frac{dz}{z^{1-\alpha}} = 0$ *para cada triángulo $\Delta(a, b, c)$ en Ω.*

Referencias Bibliográficas

[1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, in *NorthHolland Mathematics Studies*, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 2006.
[2] K. S. Miller, An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, USA, 1993.
[3] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh, "A new definition of fractional derivative", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 264, pp. 65–70, 2014.
[4] D. Zhao, M. Luo, General conformable fractional derivative and its physical interpretation, *Calcolo 54 (3)*, pp. 903–917, 2017.
[5] R. Khalil, M. Al Horani, and M. Abu Hammad, "Geometric meaning of conformable derivative via fractional cords", *Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 19, no. 4, pp. 241–245, 2019.
[6] T. Abdeljawad, "On conformable fractional calculus", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 279, pp. 57–66, 2015.
[7] A. Atangana, D. Baleanu, and A. Alsaedi, "New properties of conformable derivative", *Open Mathematics*, vol. 13, pp. 57– 63, 2015.
[8] N. Yazici and U. Gozütok, "Multivariable conformable fractional calculus", *Filomat*, vol. 32, no. 2, pp. 45–53, 2018.
[9] M. Hammad M, R. Khalil, "Legendre fractional differential equation and Legendre fractional polynomials", *International Journal of Applied Mathematical Research*, vol 3. No. 3, pp. 214-219, 2014.
[10] M. Hammad, R. Khalil, "Abel's formula and wronskian for conformable fractional differential equations", *International Journal of Differential Equations and Applications*, vol. 13, no. 3, pp. 177-183, 2014.
[11] I. Abu Hammad, R. Khalil, "Fractional Fourier Series with Applications", *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 4, no. 6, pp. 187-191, 2014.
[12] M. A. Horani, M. A. Hammad, R. Khalil,"Variations of parameters for local fractional nonhomogeneous linear-differential equations", *J. Math. Computer Sci*., vol. 16, no. 2, 147-153, 2016.
[13] R. Khalil, M.A. Horani, D. Anderson, "Undetermined coefficients for local differential equation*". J. Math. Computer Sci*., vol. 16, no. 2, pp. 140-146, 2016.
[14] E. Ünal, A. Gökdogan, E. Çelik, "Solutions of Sequential Conformable Fractional Differential Equations around an Ordinary Point and Conformable Fractional Hermite Differential Equation", *British Journal of Applied Science & Technology*, vol. 10, no. 2, pp. 1-11, 2015.
[15] M. Al Masalmeh, "Series Method to solve conformable fractional Riccati Differential equations", *International Journal of Applied Mathematics Research*, vol. 6, no. 1, pp. 30-33, 2017.
[16] M. Al Horani, R. Khalil, "Total fractional differential with applications to exact fractional differential equations", *International Journal of Computer Mathematics* vol. 95, no. 6-7, pp. 1444-1452, 2018.
[17] F.S. Silva, M.D. Moreira & M.A. Moret, "Conformable Laplace Transform of Fractional Differential Equations", *Axioms*, vol. 7, no. 55, 201).
[18] Z. Al-Zhour, N. Al-Mutairi, F. Alrawajeh & R. Alkhasawneh, "Series solutions for the Laguerre and Lane-Emden fractional differential equations in the sense of conformable fractional derivative", *Alexandria Engineering Journal*, vol. 58, no. 4, 2019.
[19] M.A. Hammad, H. Alzaareer, H. Al-Zoubi & H. Dutta, "Fractional Gauss hypergeometric differential equation", *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, vol. 2, no. 7, pp. 1113-1121, 2019.
[20] P. M. Guzmán, G. Langton, L. M. Lugo, J. Medina, J. E. Nápoles Valdés, A new definition of a fractional derivative of local type, *J. Math. Anal.*, vol. 9, no. 2, pp. 88–98, 2018.
[21] F. Martinez, J, E, Nápoles Valdés, "A note on the asymptotic properties of a generalized differential equations", *Journal of Fractional Calculus and Applications*, vol. 13. no. 1, pp. 30-41, 2022.
[22] F. Martínez. I. Martínez, Mohammed K. A. Kaabar, Rosario Ortíz-Minuera, S. Paredes, "Note o the Conformable Fractional Derivatives and Integrals of Complex-valued Functions of a Real Variable", *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, vol. 50, no 2, pp. 609-615, 2020.
[23] F. Martínez. I. Martínez, Mohammed K. A. Kaabar, S. Paredes, "Some New Results on Conformable Fractional Power Series", *Asia Pacific Journal of* Mathematics, vol. 7, no. 31, pp. 1-14, 2020.
[24] F. Martínez. I. Martínez, S. Paredes, "Conformable Euler's Theorem on homogeneous functions", *Computational and Mathematical Methods*, vol. 1, no. 5, pp. 1-14, 2019.
[25] F. Martínez. I. Martínez, Mohammed K. A. Kaabar, S. Paredes, "Generalized Conformable Mean Value Theorems with Applications to Multivariable Calculus", *Jounal of Mathematics*, vol. 2021 (Article ID 5528537), pp. 1-7, 2021.
[26] F. Martínez. I. Martínez, Mohammed K. A. Kaabar, S. Paredes, "Novel Investigation of Multivariable Conformable Calculus for Modeling Scientific Phenomena", *Jounal of Mathematics*, vol. 2021 (Article ID 3670176), pp. 1-12, 2021.

[27] Khalil, R.; Al Horani, M.; Yousef, A.; Sababheh, M. Fractinal analytic functions, *Far East Journal of Mathematical Sciences* **2018**, 103, 1, pp.113-123.
[28] Uçar, S.; Ózgür, N.Y. Complex Conformable derivative. *Arabian Journal of Geosciences* **2019**, 12:201.
[29] F. Martínez. I. Martínez, Mohammed K. A. Kaabar, S. Paredes, “New results on complex conformable integral”, *AIMS Mathematics*, vol. 5, no. 6, pp. 7695-7710, 2020.

PENSAMIENTO ESTOCÁSTICO,
UN PUENTE ENTRE NEUROCIENCIAS E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Jorge E. SAGULA
División Matemática y División Estadística
Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina
jsagula@mail.unlu.edu.ar

Resumen

¿Cuál es el epicentro de este artículo? Es evidente que el centro es el cerebro, el cerebro humano, aquel en el cual confluye todo, absolutamente todo, lo imprescindible y lo prescindible, lo valioso en todos los sentidos, aquel donde nacen las simientes de las múltiples ideas, sus desarrollos y sus soluciones, pero con preminencia en la resolución de conflictos, numerosas veces no triviales sino de características complejas, razón por la cual este cerebro mapea, a través del pensamiento, rotulado con diferentes nombres, teorías básicas y no tan básicas de resolución de incertidumbre; en esta instancia la Estocástica, en general, o bien los Procesos Estocásticos es una disciplina de amplia vastedad que se ve reflejada en el funcionamiento cerebral en su más amplia expresión. En esta rápida vista convergerán disciplinas centrales como la Biología, las Neurociencias, corrientes del Pensamiento basado en la Incertidumbre, la Inteligencia Artificial en la simulación de procesos de aprendizaje mediante modelos bio-inspirados, principalmente, tales como Redes Neurales, Machine Learning, Deep Learning y Aprendizaje por Refuerzo, amén de la Teoría de Agentes y Multiagentes, la Matemática Aplicada y precisamente, las Teorías de Resolución de Incertidumbre, pues el propósito es la resolución de conflictos, basados en el Pensamiento Complejo, y al efecto, es necesario un enfoque multimetodológico, pues en sí mismo se tienen situaciones interdisciplinarias, y frecuentemente, son la base de situaciones que requieren soluciones provenientes de la transdisciplinariedad. He aquí, las distintas concepciones del Cerebro, en el planteo y la resolución de problemas con presencia de incertidumbre, en aras de mejorar la toma de decisión inteligente.

Palabras Clave: Pensamientos (Estadístico, Probabilístico, Bayesiano, Estocástico) – Neurociencias – Cerebro Estadístico – Cerebro Bayesiano – Pensamiento Complejo - Multimetodologías - Pensamiento Heurístico y Metaheurístico – Inteligencia Artificial.

Introducción

En un mundo, como el actual, plagado de situaciones conflictivas, de diversa índole y debidas a múltiples causas y precisamente, muchas veces, tales situaciones son multicausales, cada vez surgen nuevas corrientes de pensamiento mono-disciplinares, y particionadas como escisiones, frecuentemente más pequeñas.

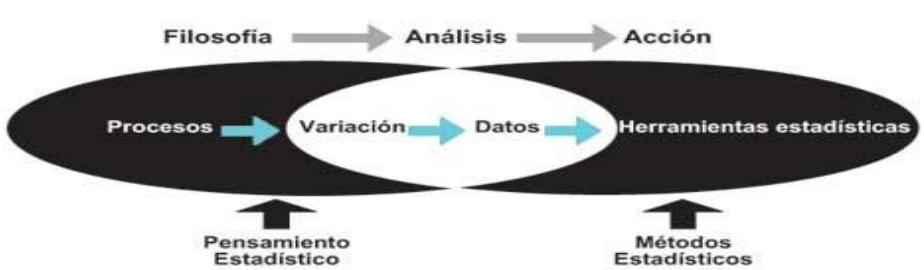
Fritjot Capra **[1]** planteó "la existencia de soluciones para los principales problemas de nuestro tiempo, algunas muy sencillas, pero que requieren un cambio radical en nuestra percepción, en nuestro pensamiento y en nuestros valores"; también manifestó que "nuestros líderes no sólo son incapaces de percibir la interconexión de los distintos problemas, sino que se niegan a reconocer hasta qué punto lo que ellos llaman soluciones comprometen a las generaciones venideras". Evidentemente, todo depende no sólo es esencial entender el significado del término "problema", sino de la interpretación que las personas hacen de tal término. Reflexionando adecuadamente, es fácil concluir que no puede anteponerse "un problema a un contexto", sino contrariamente, pues "un problema está inmerso en un contexto"; entonces, se puede expresar que: **"**Un problema constituye un obstáculo o dificultad, siempre que exista un individuo con suficiente interés o inteligencia que se enfrente (lo ha percibido) y tenga la necesidad de resolverlo, reconociendo así el dominio donde está inserto y conociendo perfectamente la situación inicial (o situaciones iniciales) y el objetivo (u objetivos), razón por la cual es necesario encontrar la solución, esto es el camino de transformación de la situación inicial en la situación final" (**Jorge E. Sagula**, 2004).

Entonces, y desde el punto de visto formativo, se torna cada vez más difícil formar individuos pensantes, capaces de abordar Situaciones Complejas, pues eso requiere la construcción de Modelos de Razonamiento acordes y ad hoc, requiere de Pensamiento Complejo **[2]** y este proceso de aprendizaje no se logra ni rápida ni ampliamente, pues es necesario disponer de espacios específicos con formadores, en todos los niveles, no sólo de amplia vastedad de conocimiento sino de mente abierta, capaces de crear en forma continua.

Sin embargo, en atención a la multicausalidad, donde se requieren soluciones tangibles, concretas, y adecuadas para situaciones conflictivas provenientes de distintos ámbitos, no siempre se resuelven en forma adecuada sino además en forma segmentada, no proveyendo soluciones multimetodológicas diseñadas sobre base científica; en tal instancia, es posible cimentarlas a partir de la Ingeniería de Conocimiento, concepto nacido en el seno de la Inteligencia Artificial, en la década de 1960, precisamente, ante la necesidad de resolver problemas, específicamente basados en conocimiento. La Ingeniería de Conocimiento (IC) comprende un conjunto de principios, métodos y herramientas que permiten aplicar el saber científico y el conocimiento heurístico al uso del conocimiento y de sus fuentes mediante ideas útiles al hombre; la I.C. enfoca y trata el problema de construcción de Sistemas Basados en Conocimiento (SBC), partiendo de procesos tales como Adquisición y Elicitación, para organizar el conocimiento, luego modelarlo y representarlo en forma entendible por máquina y realizar una implementación efectiva, tanto en SBC como en Sistemas Expertos (SE), Sistemas Inteligentes (SI), Sistemas Tutores Inteligentes (STI), Sistemas Multiagentes (SMA), Sistemas Decisionales Inteligentes (SDI), entre otros.

Pensamiento Estadístico

El **Pensamiento Estadístico** es la forma en que la información se ve, se procesa y se convierte en pasos de acción. Es una filosofía de **pensamiento**, no una forma de realizar cálculos matemáticos.



Fuente: Revista Espacios. Vol. 25, Nº 3, 2004

Herbert G. Wells (Gran Bretaña, 1866-1946), no sólo fue escritor de Ciencia Ficción, sino que su pensamiento se orientó a imaginar situaciones donde cada ciudadano del futuro debería desarrollar su vida inmerso en la realización de operaciones algebraicas y estadísticas, tales como la determinación de extremos (máximos y mínimos), cotas, y calcular y pensar en promedios, como operaciones primarias. Esto permite evaluar que una persona extra-estadística (o no estadístico) fue capaz de vislumbrar “escenarios plausibles”, previendo la necesidad de utilizar Pensamiento Estadístico como concepto insoslayable del lenguaje ordinario.

Snee (1993) define al Pensamiento Estadístico expresando que se trata de “un conjunto de principios y valores que permiten identificar los procesos, caracterizarlos, cuantificarlos, controlar y reducir su variación para implantar acciones de mejora” **[3]**.

El Pensamiento Estadístico se sustenta en la Teoría en Administración del estadístico William Edwards Deming **[4]**, pues desarrolló el Sistema de Conocimiento Profundo, que contiene la esencia de los tres principios del Pensamiento Estadístico:

1) Todo trabajo ocurre en un sistema de procesos interconectados;
2) La variación existe en todos los procesos;
3) La clave del éxito se alcanza comprendiendo y reduciendo la variación del proceso.

y consta de cuatro partes: la apreciación de un sistema; el conocimiento sobre la variación; la Teoría del Conocimiento y la Psicología.

La División Estadística de la American Society for Quality Control (ASQC) en el año 1994, presentó el proyecto sobre Pensamiento Estadístico en la reunión Tactical Planning Meeting; el objetivo fue que los miembros de tal división, aplicaran el Pensamiento estadístico en su trabajo para lograr mejores resultados. El primer problema que tuvo el equipo fue que todos tendieron a emplear el término “pensamiento estadístico”; pero hubo variación en quienes constaban como miembros del equipo. Consecuentemente, el primer objetivo fue desarrollar y publicar una definición operacional del Pensamiento Estadístico. Finalmente, en el año 1996, expresaron que “el pensamiento estadístico es una filosofía de aprendizaje y acción basada en varios principios fundamentales que tiene como finalidad el logro del mejoramiento del desempeño institucional” **[5]**.

Pensamiento Probabilístico

El Pensamiento Probabilístico, esencialmente, consiste en tratar de estimar, mediante algunas herramientas lógicas y matemáticas, la probabilidad que suceda algún resultado específico. En este contexto, el Pensamiento Probabilístico posibilita identificar los resultados más probables; en tal instancia, las decisiones se consideran más precisas y efectivas.

El Pensamiento Probabilístico está fuertemente afectado por el mecanismo de construcción de Modelos Mentales, que constituyen representaciones psicológicas de situaciones reales, imaginarias o hipotéticas, desde las cuales se construyen escenarios en base a marcos referenciales, y que permiten, mediante posteriores mecanismos cognitivos, el planteo y la resolución de problemas, y el proceso de toma de decisiones. Las teorías de representación de la mente permiten que las representaciones de constructos mentales y el uso de las mismas en los procesos de decisión sean posibles, existiendo sustento en la cognición, generando acciones. Se puede postular que “una representación mental es un isomorfismo entre procesos que ocurren en el cerebro y el comportamiento de ciertos aspectos del mundo”. Esta definición de una Teoría de la Representación, permite vincular el concepto de Modelo Mental con la Heurística (del griego “heuriskien”, significa “buscar”); Heurística puede definirse como “conjunto de procedimientos simples, frecuentemente basados en el sentido común, que conforme se supone, permitirán obtener una buena solución a problemas con cierto grado de dificultad, en forma rápida y fácil” (**Zanakis & Evans**, 1981).

No es posible hablar de Heurística sin mencionar a George Polya **[6]**.

Definir una teoría de la representación como fue hecho precedentemente, permite vincular el concepto de Modelo Mental con la Heurística; consecuentemente, las metodologías de resolución se traducen en representaciones mentales (o bien, internas) que cada aprendiz construye en su proceso de razonamiento.

Es menester mencionar que “las representaciones se pueden considerar como poderosas herramientas para la construcción de la comprensión y consecuentemente, para comunicar la información y la comprensión misma” (**Greeno & Hall**, 1997).

Es necesario, que la enseñanza de la probabilidad en el sistema escolar, se oriente al desarrollo de Alfabetización Probabilística y Pensamiento Probabilístico, conforme lo expresan Vergara et al. **[7]** en su estudio sobre relaciones entre pensamientos proporcional y probabilístico en la toma de decisiones. En cuanto a la Alfabetización Probabilística, Gal **[8]** y Sánchez **[9]** la vinculan con el Conocimiento Probabilístico elemental de los ciudadanos en su desenvolvimiento cotidiano, refrendando el Pensamiento Estadístico del escritor H. G. Wells.

Gal **[8]** propone un modelo, en el cual el componente cognitivo incluye los conceptos: (1) Ideas Centrales: variación, aleatoriedad, independencia, predictibilidad, incertidumbre; (2) Cálculo de probabilidades, estimando la probabilidad de ocurrencia de eventos; (3) Idioma: términos y métodos utilizados para comunicarse sobre el azar; (4) Contexto: comprender el papel y las implicaciones de los problemas y mensajes probabilísticos en varios contextos y en el discurso público y personal; y (5) Preguntas críticas: cuestiones sobre las que reflexionar cuando se trata de probabilidades.

Es dable concluir que el Pensamiento Probabilístico puede verse como una línea de Pensamiento de mayor complejidad, el Pensamiento Heurístico, no excluyente de tales procesos, pero que constituye una línea metodológica orientada a la Resolución de Problemas, y que precisamente, puede definirse mediante un conjunto de reglas metodológicas, sobre la base de la creatividad, el ingenio y la invención; consecuentemente, parte de la percepción contextual hacia la asimilación y la comprensión del conocimiento en pro de la capacidad en la resolución de problemas.

Pensamiento Estocástico

Estocástico es un concepto empleado por investigadores en la enseñanza de Estadística, Probabilidad y Combinatoria, refiriéndose a la interfaz entre los conceptos combinatorio, probabilístico y estadístico, los cuales posibilitan el desarrollo de formas particulares de pensamiento, involucrando fenómenos aleatorios, interpretación de muestras y elaboración de inferencias. Para que exista una significativa percepción de lo Estocástico, es necesario el desarrollo del Pensamiento Estadístico y Probabilístico, hecho que exige un trabajo orientado hacia las formas de razonamiento combinatorio, asociados al razonamiento probabilístico y estadístico. El Pensamiento Estocástico evoluciona continuamente por el desarrollo de la matemática y la física principalmente.

La exploración al azar, la curiosidad estocástica y la generación aleatoria de descargas neuronales juegan un rol clave en el proceso de aprendizaje, y en el aprendizaje mismo.

Neurociencias

Las Neurociencias cumplen “la compleja e intrincada función” de desentrañar la actividad cerebral en su vinculación con la mente, la conducta y la actividad nerviosa, tanto en el nivel molecular y neuronal como en Redes Neuronales y a niveles conductual y cognitivo.

Las Neurociencias comprenden un conjunto de disciplinas científicas interdisciplinarias y transdisciplinarias que estudian la estructura, las funciones y el desarrollo del Sistema Nervioso, y específicamente, el Cerebro, y fundamentalmente “cómo aprende” “cómo guarda la información”.

Consecuentemente, el estudio de Neurociencias involucra las siguientes áreas: Neuroanatomía, Neuroquímica, Psicoinmunoneuroendocrinología, Neuropsicología (con inclusión del estudio de efectos de lesiones cerebrales), Neurociencia Cognitiva (Pensamiento, Memoria, Atención, Percepción), Psicofisiología, Biología, Física, Electrofisiología, Matemáticas Superiores, Genética, Antropología, Filosofía/Ontología, Bio-Psicología, Farmacología, Paleoneurobiología, Ciencias de la Computación, con énfasis en Inteligencia Artificial, entre otras.

En la década de 1990, la Neurociencia, la Psicología Cognitiva, la Inteligencias Artificial y la Lingüística convergen a la Neurociencia Cognitiva (Neurociencia Computacional), generando el descubrimiento de propiedades y de principios gobernantes de redes neuronales y de neuronas, produciendo una integración.

La Neurociencia Computacional (que se corresponde con la estructura de hardware, explica la cognición) se basa en este orden de conceptos: Neurociencia, Ciencias de la Computación, Matemática, Psicología Experimental y Filosofía. Se trabaja, desde la disciplina, para asumir que los Modelos Mentales se pueden correlacionar con los patrones de impulsos nerviosos en el cerebro.

Cerebro Estadístico

La Teoría del Cerebro Estadístico deviene en que el cerebro superar a las máquinas, siempre en términos de incertidumbre y probabilidades, optimizando su capacidad de aprendizaje. Los algoritmos que sustentan a Machine Learning y Deep Learning, su evolución, aún están en forma de desplazamiento Bottom Up (sin capacidad de reflexión) respecto de la capacidad del cerebro. Es importante consignar que el cerebro puede reconocer un patrón, tanto en sonido como imagen, en una fracción de segundo, en tanto que una máquina requiere de un análisis de Big Data y miles, millones de datos. Los algoritmos implementados en redes neurales de aprendizaje llegan a un óptimo de cómputo, estabilizándose, marcando una tendencia en sus datos; en tanto que el cerebro humano logra un registro constante de la incertidumbre asociada a cada nodo de información y procede a actualizarla en cada momento de aprendizaje.

El cerebro genera permanentemente modelos del contexto en el cual se mueve y, en función de la información que percibe a partir de los sensores humanos, efectúa predicciones sobre el futuro inmediato (en este primer nivel es lo que ocurre en todos los seres humanos, existe una capacidad esencial de supervivencia), y en algunas instancias, en mayores desarrollos, en el futuro mediato.

La hipótesis sobre esta capacidad intrínseca del funcionamiento del cerebro sea de naturaleza estadística fue planteada por el médico y físico Hermann von Helmholtz (1821-1894), en su obra **Tratado de Óptica Fisiológica** (1866), pues forjó la expresión “Inferencia Inconsciente” en pos de designar este modo de operar. Esta expresión destaca el carácter estadístico de tal capacidad, debido a que los estímulos que llegan al cerebro responde a una naturaleza intrínsecamente variable, y además, permiten identificar las regularidades entre una amplia gama de variaciones, hecho que representa la esencia del trabajo estadística; pero, en medio de esta variabilidad, la identificación de regularidades no puede limitarse a reconocer si una cierta secuencia de eventos se repite idénticamente a los estímulos **[10].**

Cerebro Bayesiano

El Cerebro Bayesiano representa un Estadístico Neuronal, surgiendo como un Modelo entre el cerebro pensado como todo lo innato y todo lo adquirido, siendo superior a una máquina; actúa como un Estadístico permanentemente considerando incertidumbre y probabilidades en términos a optimizar su capacidad de aprendizaje

Conforme a la Teoría del Cerebro Bayesiano, se sostiene que el cerebro permite comprender cómo funciona el mundo, y esto involucra los diferentes escenarios de inmersión. Esta labor se desarrolla en la corteza orbifrontal. Así, no se percibe el mundo tal como es realmente, sino como el cerebro supone que es; situación que es profundizada mediante los impulsos sensoriales que se reciben de acuerdo a las percepciones del mundo exterior.

La importancia de Thomas Bayes y la formulación de su Teoría del Cerebro Bayesiano reside en que "el cerebro se guía mediante la Teoría de la Probabilidad o Regla de Bayes" **[11].** Este pensamiento se refleja en las manifestaciones de científicos cognitivos que conjeturaron y lo siguen haciendo, enfáticamente, que el cerebro humano incorpora algoritmos probabilísticos, específicamente bayesianos en todo momento, tanto desde la percepción como en los procesos deliberativos y decisionales.

Pensamiento Complejo

El concepto de **Pensamiento Complejo** fue concebido por el filósofo y sociólogo francés, **Edgar Morín**. El Pensamiento Complejo considera la capacidad de conectar diferentes dimensiones de la realidad, caracterizado por incluir paulatinamente incrementalmente nuevos componentes, en correlato con la evolución de la humanidad en función de su evolución y progreso. A medida que aumenta la complejidad, es necesario disponer de mayor nivel de detalle sobre el contexto. Consecuentemente, por las características de alto nivel de heterogeneidad que la sociedad presenta, es necesario que el individuo para poder tener una opinión lo suficientemente argumentada y justificada, efectúe un proceso reflexivo adecuado en toda la información percibida: a esta Capacidad Reflexiva es precisamente, a la que **Edgar Morín** denotó como **Pensamiento Complejo [12].**

El pensamiento complejo esencialmente constituye una estrategia cuya intención es globalizadora, pues, trata de comprender la totalidad de los fenómenos presentados, pero considerando sus particularidades como eventos diferentes que son. Este concepto es totalmente contrario al del Pensamiento Simplificador, que unifica todo el conocimiento en una sola visión, anulando la posible diversidad que hubiera y encaminando al individuo a una "inteligencia ciega".

Un principio básico de la Teoría de Sistemas Complejos afirma que toda alteración en un componente del sistema se propaga de diversas formas mediante el conjunto de relaciones que definen la estructura del sistema, y en situaciones críticas (de baja resiliencia), genera una reorganización total. Así, las nuevas relaciones y la nueva estructura emergente, implican modificaciones de los elementos y del funcionamiento del sistema total. Las interacciones entre el todo y las partes no se pueden analizar fraccionando el sistema en un conjunto de áreas parciales correspondientes al dominio disciplinario de cada elemento **[13].**

Multimetodologías

La profundidad de la complejidad sólo puede analizarse en el contexto de la interdisciplinariedad, en primera instancia, y en la transdisciplinariedad a posteriori; consecuentemente, para un efectivo tratamiento de estos temas es adecuado dirigirse a un Enfoque Multimetodológico.

La Multimetodología se entiende generalmente como el "arte" de ir más allá del uso de una única metodología con el propósito de combinar generalmente varias metodologías, en su totalidad o en parte, y si la situación lo amerita, provenientes de distintos paradigmas, de forma de enfrentar la riqueza del mundo real **[14].**

Es necesario enfatizar que Multimetodología no se relaciona con un paradigma o una metodología específica, o con una forma específica de combinación de metodologías, sino que supera estas posibilidades, orientándose a vincular, integrar y combinar diferentes metodologías, técnicas y herramientas, desde un mismo paradigma o varios y distintos paradigmas, para responder a conflictos en diferentes situaciones contextuales, y por tanto, inicialmente existe una heurística y una heurística operativa que permite mejorar las capacidades cognitivas a la hora de definir qué conceptos son necesarios para construir, en modo de convergencia, la integración de metodologías, técnicas y herramentales, aunque los mismos provengan de diferentes ciencias y/o disciplinas, de modo que los sistemas sensoriales humanos juegan un rol esencial para ello, pues la clave está en cómo dirigirlos disponiendo de "la intención de registrar", y por supuesto "interpretar el contexto", realimentando la información y el conocimiento, generando conocimiento del conocimiento, refinando el conocimiento, en pos del meta-conocimiento, posibilitando el surgimiento de la Metaheurística **[15].**

Las Multimetodologías se justifican en la necesidad de estudiar e investigar "*sistemas complejos"*, pues éstos son "consecuencia de varias estructuras (o componentes) que se interrelacionan", y desde la vinculación de sus componentes pues existe información adicional no percibida previamente por el observador; así, esto permite advertir que como fruto de las interacciones entre los componentes se obtienen nuevas propiedades imposibles de explicarse conociendo sólo las propiedades (Propiedades Emergentes) de los elementos aisladamente **[13].**

Es evidente que, sin modelar adecuadamente un sistema complejo, en general, se obtendrá no más que una irrelevante aproximación; por tanto, el tratamiento de un tema de esta magnitud, independientemente del área temática de proveniencia, se centra en el tratamiento "multidisciplinario", pero específicamente de carácter *interdisciplinario.*

Pensamiento Heurístico y Metaheurístico

La Heurística, que engloba las técnicas que permiten incrementar la eficiencia de un proceso de búsqueda, y su evolución, la Metaheurística, que corresponde a "un proceso iterativo que conduce una heurística subordinada, combinando diferentes conceptos para explorar y explotar las características que pueda exhibir el espacio de búsqueda" (*Osman & Laporte*, 1996) son naturalmente pilares insustituibles aportantes de metodologías, métodos y/o técnicas para el análisis y procesamiento de *Big Data*, específicamente mediante: Redes Neurales, Algoritmos Genéticos, Swarm Intelligence (Colonias de Hormigas, Enjambre de Partículas), y otros tantos modelos de búsqueda y aprendizaje en el contexto de la Inteligencia Artificial **[16].**

Metaheurística, significa "Más allá de la heurística" o "Refinamiento de heurística". El término surge en Operation Research impulsado por Fred Glover al introducir el Método Búsqueda Tabú (1988, 1997); así, Osman & Laporte (1996) definen *Metaheurística* como "un proceso iterativo que conduce una heurística subordinada, combinando diferentes conceptos para explorar y explotar las características que pueda exhibir el espacio de búsqueda".

Así, puede afirmarse que la *Metaheurística* surge, por caso, de la observación metódica en las ciencias del comportamiento, resultando Modelos Metaheurísticos tales como: Redes Neurales, Algoritmos Genéticos (ambos Bio-Inspirados), Swarm Intelligence (Colonias de Hormigas, Colonias de Abejas), en este último caso siendo consecuencia de la *Etología*, entre otros.

Ciertamente, rápidamente se puede inferir que "la percepción" une a las tres temáticas (Etnomatemática, Heurística y Metaheurística) a través de la Interdisciplinariedad, pero "una mejor percepción", permite incrementar el conocimiento y consecuentemente mejorar los modelos que, desde el simbolismo matemático, en su más amplia expresión, posibilitan la construcción de meta-modelos aptos en la resolución de problemas generales y complejos, y, extrapolables en la medida que se conozcan los contextos de aplicación **[16].**

Inteligencia Artificial

¿Cómo definir a la Inteligencia Artificial? En forma simple, la Inteligencia Artificial (IA) responde al diseño de sistemas o máquinas que imitan (o simulan) la Inteligencia Humana, en cuanto a la realización de tareas generales o específicas, y que, con el paso del tiempo, pueden evolucionar, en función de la información que han recopilado. Este concepto irrumpe en la ciencia como consecuencia de la publicación del Filósofo y Matemático Alan Turing, "Computer Machinery Intelligence" (1950), en la cual expresa, entre otros conceptos salientes, que, "en alguna medida", las máquinas obtendrían inteligencia y serían capaces de simular razonamientos de un ser humano.

"Hay algoritmos de Inteligencia Artificial que fueron inspirados simulando el cerebro. Pero también hay ingenieros que trabajan con neurocientíficos o gente que estudia el cerebro, como psicólogos, que simulan el cerebro y comprueban si lo conocido por la psicología puede explicar aspectos del funcionamiento del cerebro cuando se lo simula en una computadora", explica Sánchez-Montañés, haciendo hincapié en que sólo son imitados fragmentos del cerebro.

Los algoritmos computacionales que se denominan Redes Neurales (o Redes Neuronales Artificiales) están inspiradas en la organización jerárquica de la corteza cerebral; se organizan en una pirámide de capas sucesivas, en la cual cada una intenta descubrir irregularidades de mayor profundidad que la capa anterior; cada capa de por sí, puede "descubrir" una parte muy simple de lo que ocurre en forma externa a su contexto; pero, si se unen varias capas, se configura un dispositivo de aprendizaje.

A modo de síntesis, y por tratarse de una temática fundamental en el trabajo conjunto desde la visión biológica, con enfoque en las Neurociencias y la Inteligencia Artificial, es menester realizar una síntesis de los aspectos más salientes en la evolución de la IA, desde el aporte genérico de las Redes Neurales hasta converger en los nuevos enfoques de los últimos años. Puntualmente, las Redes Neurales, en alguna forma, pueden remontarse a los trabajos iniciales de McCulloch y Pitts (1943) en lo atinente a Simulación de Mecanismos Mentales; luego, Hebb (1949) definía el Método de Actualización de Pesos Sinápticos (Método Hebbiano), introduciendo el concepto Conexionismo, aportando a las Redes Neurales estos conceptos:

- Información en Redes Neurales, almacenada en conexiones (Peso Sináptico).
- La Velocidad de aprendizaje en las conexiones es proporcional al producto de valores de activación de las neuronas.
- Los pesos son simétricos.
- En el Proceso de Aprendizaje, se producen modificaciones en las conexiones (Pesos Sinápticos), generando "conjuntos" de células.

Hasta el año 1974, los investigadores de Inteligencia Artificial centraron su atención simultáneamente en dos aspectos: Extensión de la capacidad de computadoras y Movimiento hacia la comprensión de la Inteligencia Humana. Y comienzan a enfatizar sus acciones en Inteligencia Artificial y Simulación Cognitiva.

Kohonen (1972) concibió una Red Neural, la Memoria Asociativa, que presenta una única capa de neuronas fuertemente conexas entre sí y con el mundo exterior, tal que los valores de activación son lineales y continuos. Anderson (1972) concibe una Red Neural, la Memoria Interactiva; desarrolló un Modelo Lineal (Asociador Lineal) que corresponde a un Modelo de Procesamiento Paralelo Distribuido; y se interesó en describir Modelos de Redes Neurales y sus correspondientes mecanismos de aprendizaje.

Hopfield (1982) presentó un núcleo de nuevas ideas sobre Redes Neurales, estableciendo estructuras de algoritmos y redes, que se pueden generalizar robustamente; su modelo se implementó en circuitos electrónicos, en 1986. Una Red de Hopfield es similar a la Memoria Asociativa, que ha entrenado un núcleo de ejemplos, tal que un nuevo estímulo puede causar que la Red se fije en la activación de un patrón correspondiente al ejemplo del conjunto de entrenamiento que tiene mayor parecido con el nuevo estímulo.

Hopfield y Tank (1987) aplican las Redes Recurrentes a problemas complejos de optimización; más tarde, Hopfield inicia el diseño de algoritmos de aprendizaje y distribuciones de probabilidad en redes tanto hacia adelante como en redes de retroalimentación.

Conforme a la visión biológica de los perceptrones de Rosenblatt (1958), correspondiente a Algoritmos de Aprendizaje Supervisado y No Supervisado, tanto McClelland (1986) como Kohonen (1989) desarrollaron sus modelos.

Grossberg (1973, 1976, 1980, 1982, 1988) postuló el concepto de "Control de Ganancias para un Grupo de Neuronas", a partir de la idea: "Encendido en el Centro, Apagado alrededor", postulando: "Dado un grupo de neuronas, si una está Excitada, las que están a su alrededor reciben una señal que las hace Inhibidas"; además, construye Redes Neurales con la incorporación de datos neurológicos y principios fisiológicos.

Grossberg y Carpenter (1987-1990) desarrollaron Arquitecturas de Redes Neurales que denominaron ART (Adaptive Resonance Theory) que auto-organizan códigos de reconocimiento de patrones estables en tiempo real en respuesta a secuencias arbitrarias de patrones de entrada; el proceso adaptable de reconocimiento de patrones corresponde a un proceso cognitivo más general para acceder al descubrimiento de hipótesis, verificación, búsqueda, clasificación y aprendizaje.

Kohonen (1990, 1991) introdujo la idea de Mapa Auto-Organizado, describiendo una Red Neural de 2 capas, tal que la capa de entrada estaba totalmente conectada a una Capa de Kohonen; esta estructura tiene la particularidad de aprender a clasificar sin haberle provisto la respuesta correcta para el patrón de entrada.

Alexander (1990) postuló que el entendimiento profundo de diferentes modelos de Procesamiento Mental posibilitaría en el futuro un gran avance en distintas temáticas de Inteligencia Artificial.

Grsdenfors (1995) expresó que las Redes Neurales, la Formación de Conceptos y la Semántica Cognitiva constituían la base de la investigación en Agentes Autónomos y en Visión Artificial; de esa forma, la IA tendría un promisorio futuro, orientándose a: Simulación Cognitiva y Desarrollo de Programas Inteligentes.

Alexander (1996) junto a su equipo de investigadores, desarrolló una arquitectura general híbrida, con 3 niveles mayores: Sensorización, Cognitivo Neural y Computacional Convencional.

Cuando comienzan las investigaciones en Aprendizaje Automático (Machine Learning) en el campo de la Inteligencia Artificial en la década de 1980, a partir de las ideas de Alan Turing en 1950, el objetivo fue desarrollar técnicas de aprendizaje para máquinas, con el propósito de "generalizar comportamientos e inferencias para un gran conjunto de datos", y esta respuesta es "como imitación de la forma de aprendizaje del cerebro humano", y sus estrategias se sustentan en Algoritmos basados en Regresión y Algoritmos basados en Árboles de Decisión, precisamente mediante la potencia de técnicas y metodologías "apropiadas" de la Heurística y la Metaheurística. El Aprendizaje Automático se relaciona intrínsecamente con el Aprendizaje Estadístico y la Estadística Inferencial y el Reconocimiento de Patrones, y puede verse como un Método de Inducción de Conocimiento. Se puede implementar Aprendizaje Supervisado (con asistencia humana) y Aprendizaje No Supervisado (sin asistencia humana).

Deep Learning (Aprendizaje Profundo), avance de Machine Learning, debe su denominación a *Geoffrey Hinton* (Premio Alan Turing, 2018) en 1986, al introducir el Algoritmo **Backpropagation**, empleado para entrenar Redes Neurales Multicapas (Redes Neurales Profundas), emulando la percepción humana inspirada en el cerebro y la conexión neuronal. Al efecto, configura parámetros básicos sobre los datos, entrenando a una máquina para que "aprenda" reconociendo patrones utilizando muchas capas de procesamiento. Las técnicas utilizadas por Deep Learning mejoran las capacidades de clasificación, reconocimiento, detección y descripción; y sus campos de desarrollo son: Reconocimiento de Patrones, Identificación de Imágenes y Analytics (Predictiva). Sus mayores logros se ubican en: Clasificación de Imágenes, Reconocimiento del Habla, Detección de Objetos y Descripción de Contenidos. En esta temática, atinente a la Resolución de Problemas, tanto la Heurística como la Metaheurística juegan roles esenciales.

El Aprendizaje Profundo por Refuerzo constituye una Neo-Evolución, un nuevo paradigma, pero desde ideas previas, inspiradas en Alan Turing (1950) y proseguidas por Marvin Minsky (1951, 1968, 1985), proveyendo líneas de transdisciplinariedad entre Machine Learning y Deep Learning, por un lado y la Teoría de Agentes y Multiagentes Inteligentes, por el otro. Mediante Aprendizaje Profundo por Refuerzo, un Agente Inteligente aprende a optimizar un Proceso de Decisión.

Los sistemas de Aprendizaje por Refuerzo exploran y adquieren datos sobre el problema por propia iniciativa, diseñando automáticamente estrategias en busca del objetivo.

A efectos que la máquina aprenda, el agente interactúa con "un entorno", que puede ser el proceso decisión real, o bien, una simulación del mismo. El agente trabaja observando el entorno, y tomando una decisión para comprobar qué efectos produce. Siguiendo un proceso de Aprendizaje por Condicionamiento similar al de los seres humanos, el agente aprenderá qué decisiones son más apropiadas, conforme a la situación, desarrollando estrategias a largo plazo, con el propósito de maximizar los beneficios.

Por cierto, que, todos estos trabajos, como más salientes, permitieron plasmar el futuro, en general, de la Inteligencia Artificial, brindando las ideas que elucubraron y que, con distintos avatares en términos de implementación, llevaron a campos promisorios, que hoy por hoy, siguen alimentando a sub-disciplinas tales como Machine Learning, Deep Learning y Deep Reinforcement Learning, en las líneas más vinculadas con las Neurociencias e Inteligencia Artificial **[15].**

Neurociencias e Inteligencia Artificial

Así las cosas, las diferentes tecnologías están produciendo cambios en nuestra cotidianeidad, y por supuesto en este contexto, no escapa a la consideración la Inteligencia Artificial, por un lado, y por otro, las Neurociencias, particularmente la IA en la Educación y las Neurociencias en Educación (Neuroeducación), vienen ganando territorio a paso firme, tanto en cuanto a la mejora de los procesos cognitivos como a la potenciación como metodologías de soporte del aprendizaje, y en cuanto al aprendizaje propiamente dicho.

Esta fusión, la Neuro-IA, es un refinamiento de la convergencia a la Neurociencia Cognitiva (Neurociencia Computacional) desde las Neurociencias, la Psicología Cognitiva, la Inteligencia Artificial y la Lingüística, generando el descubrimiento de propiedades características y de propiedades gobernantes tanto de neuronas como de redes neuronales, produciendo una integración. La Neurociencia Cognitiva se basa en este orden de conceptos: Neurociencias, Ciencias de la Computación, Matemática, Psicología Experimental y Filosofía en pos de asumir la correlación entre los modelos mentales y los patrones de impulsos nerviosos en el cerebro.

Conclusiones

En este artículo, producto generador de la Conferencia “Pensamiento Estocástico, un puente entre Neurociencias e Inteligencia Artificial” surgen conceptos provenientes de distintas disciplinas, desde la Biología, en términos de la comprensión del ser humano, en su máxima expresión, particularizando en el Cerebro, en su amplia expresión, para estudiar su configuración, sus procesos, la convergencia y la optimización de procesos, modelos mentales, razonamiento y aprendizaje, desde distintas concepciones del Cerebro, en el planteo y la resolución de problemas con presencia de incertidumbre, en aras de mejorar la toma de decisión inteligente, desde la Inteligencia Artificial en la simulación de procesos de aprendizaje mediante modelos bio-inspirados, principalmente, tales como Redes Neurales, Machine Learning, Deep Learning y Aprendizaje por Refuerzo, amén de la Teoría de Agentes y Multiagentes. Es muy importante la Matemática Aplicada y precisamente, las Teorías de Resolución de Incertidumbre, pues todo hace a la resolución de conflictos, basados en el Pensamiento Complejo, y para ello, es necesario un enfoque multimetodológico, pues en sí mismo se tienen situaciones interdisciplinarias, y frecuentemente, son la base de situaciones que requieren soluciones provenientes de la transdisciplinariedad, y por supuesto, desde las Neurociencias, disciplina de la integración desde el funcionamiento del Sistema Nervioso, capaz de cambiar, los paradigmas clásicos en cuanto a la visión de todo. Es natural, entonces, que, en Nuestra Vida, debemos transitar numerosos puentes, pero, éste en particular, contribuye a mejorar los procesos de aprendizaje en procura de la toma de decisiones de carácter inteligente.

Referencias Bibliográficas

[1] Capra, Fritjot (2008). La trama de la Vida. Una nueva perspectiva de los sistemas vivos. Anagrama. ISBN 978-84-339-7343-6.
[2] Morin, Edgar (1990). Introducción al Pensamiento Complejo. Ed. GEDISA.
[3] Snee, R. D. (1993). “What’s Missing in Statistical Education”, The American Statistician, 47, 149-154.
[4] Deming, William Edwards (1994). The New Economics. Boston.
[5] Quality Press (1996). Glossary and Tables for Statistical Quality Control.
[6] Polya, George. How to Solve It? Universidad de Princeton, 1945.

[7] Vergara, A., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23(1), 7-36.
[8] Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. G. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning, 39-63. NY: Springer.
[9] Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. Educación Matemática, 21(2), 39-77.
[10] Hernández, N. et al (2021). Retrieving the structure of probabilistic sequences of auditory stimuli from EEG data. Scientific Reports.
[11] Farías, Isbelia (2021). Thomas Bayes y el Cerebro Bayesiano. Psicoactiva.
[12] Morin, Edgar (1990). Introducción al Pensamiento Complejo. Ed. GEDISA.
[13] García, Rolando (2006). Sistemas Complejos; Editorial GEDISA.
[14] Mingers, J. (1997). Multi-Paradigm Multimethodology. John Wiley & Sons, England.
[15] Sagula, Jorge E. La importancia creciente de la Heurística y la Metaheurística en la Resolución de Problemas. En Memorias del II SEM-V-Tomo I. Universidad Nacional de Luján. Luján, Buenos Aires, Argentina; 13-14 mayo'2021. EDUNLu (a aparecer en 2022)]
[16] Sagula, Jorge E. (2020). Visión de la Educación Matemática en Convergencia con la Inteligencia Artificial en Contextos Complejos (Tiempos de Pandemia) (desde Big Data a Machine Learning). En Memorias del I SEM-V. Universidad Nacional de Luján. Luján, Buenos Aires, Argentina; 13-14 agosto'2020. ISBN 978-987-3941-61-0, EDUNLu, 2021.

ANÁLISIS MULTIVARIABLE PARA REVELAR FACTORES ASOCIADOS A LA FORMACIÓN MATEMÁTICA: LA OTRA CARA DE LA DIDÁCTICA

Rafael LORENZO MARTÍN

Universidad de Holguín, Cuba

rlorenzo@uho.edu.cu

Resumen

La Didáctica, desde su objeto de estudio de indagar sobre el proceso de formación integral del ser humano desde condiciones curriculares y demandas contextuales emergentes para favorecer competencias, se erige como esencial para contribuir al éxito escolar y desarrollo de los estudiantes. En efecto, las didácticas especiales como suele ser la de la Matemática, por su alto carácter de abstracción y polivalente multifuncionalidad transversal en su explicación cuantitativa y relaciones espaciales de la realidad; se convierte en todo un reto. Es reconocido por los estudios de Evaluación de la Calidad por la Organización de Estados Iberoamericanos y por el movimiento de Eficacia Escolar, que existen más de 450 factores asociados a la calidad de la Educación Matemática, pero revelar cómo están conectados, que impacto tienen y que intensidad establecen con respecto a otros componentes es todo un laberinto de posibilidades. Por lo que, solo analizar la pertinencia en el interior desde los componentes esenciales de la didáctica (objetivo, contenido, métodos, medios, formas de organización y evaluación) y no interpretar la conexión de los factores asociados redundaría en miradas incompletas. Desde esta perspectiva en este estudio se propone un análisis multifactorial desde un exhaustivo estudio de campo en la secundaria básica, determinando como variable producto la calidad de la Educación Matemática. A propósito, se reconocen interesantes novedades en las variables explicativas que ameritan una comprensión de sus interrelaciones múltiples, su intensidad y sentido (positivo o negativo) de incidencia. Resultados que serán fundamentales para calibrar el tratamiento didáctico de la Educación Matemática.

Palabras clave: Educación Matemática – Calidad - Eficacia Escolar - Factores Asociados - Didáctica de la Matemática - Estudios Multinivel.

El trabajo previo que ha inspirado esta Conferencia fue compartido con el Dr. en Ciencias Paul Antonio, TORRES FERNÁNDEZ, Investigador Titular del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

La Educación, que no está al margen de los conflictos contemporáneos. A su vez, se plantea metas superiores orientadas a transformar y esclarecer conceptos, estructuras, estilos de dirección, políticas y estrategias, de manera que los centros educativos ocupen distintivamente su papel indiscutible en la formación integral de la personalidad de las nuevas generaciones, para convertirse en el factor clave del desarrollo de las naciones en las nuevas circunstancias históricas. En estas circunstancias ha aumentado el interés y preocupación por elevar la calidad de los sistemas educativos. De esta manera, puede decirse que la necesidad humana de adiestrar al hombre para una mejor convivencia y desarrollar al mundo actual, que abre sus puertas para una época más compleja, ha provocado nuevas concepciones en la formación de las distintas materias que deben considerarse la base del desarrollo científico; entre ellas, por supuesto, la Matemática.

La Matemática Escolar ocupa un lugar determinante en el proceso de formación de individuos que sean capaces de asumir los retos científicos y técnicos como los que demanda el actual desarrollo social. Además, ayuda al estudiante a organizarse en aspectos de su vida cotidiana y en otras asignaturas, le va enseñando a razonar, organizar y tener un desenvolvimiento lógico en su vida, así como una concepción científica del mundo. La preocupación por caracterizar el estado del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática ha sido ampliamente manejada desde hace tiempo por diferentes investigadores, donde se integran posiciones variadas, como por ejemplo las clásicas miradas de: "Partimos de un lugar común, a saber, que las Matemáticas en escuelas, colegios y universidades, en todos los países del mundo, son una calidad para todos los estudiantes". (Montero, 1989, citado en Lorenzo 2004). "Entre todos los que estamos relacionados con la enseñanza desde diferentes esferas, profesores, padres, alumnos, etc.; existe una opinión generalizada cerca de la dificultad que entraña la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas(...), una materia que se concibe, (...) al mismo tiempo como abstracta y útil para nuestros alumnos". (Blanco, 1991).

En efecto, de inmediato hubo una preocupación de la comunidad científica por profundizar en estos resultados en busca de alguna explicación objetiva ante las diferencias reveladas por el TIMSS, de esta forma Julia Whitburn (especialista del Instituto Nacional para la investigación Económica y Social de Gran Bretaña) se dedicó a determinar los criterios comunes en que se enseña Matemática en Japón y Suiza, de lo que resultó que: Los alumnos aprenden a hacer sumas en sus cabezas antes que en el papel, ya que se emplea mucho más tiempo a las bases aritméticas que a los temas matemáticos generales. Se aplica un método de enseñanza en el cual predominan las preguntas a los alumnos, conocido como "enseñanza interactiva". Se utilizan abundantemente los textos de enseñanza estandarizados, lo que se experimentan exhaustivamente antes de su publicación. Finalmente, se establecen múltiples acciones para evitar que los alumnos se retrasen y en casos imposibles se les brinda una tutoría especializada. (Prensa Latina, 1997, citado en Lorenzo, 2004).

Se reconocen estudios que hacen ciertos análisis exhaustivos de la calidad de la Educación Matemática desde una mirada internalista y enfocados a los elementos personales y no personales de la Didáctica especializada, aspectos que han ganado en consenso de su importancia. Sin embargo, no es menos cierto que es frecuente encontrar estudiantes a distintos niveles que egresan sin haber vencido satisfactoriamente los objetivos de la etapa académica. Se debe mencionar que es recurrente en la literatura de Ciencias de la Educación observar elementos que dirigen su atención al desfavorable estado de la Matemática, con énfasis en el nivel medio, a: la falta de interés en los discípulos, el escaso desarrollo de habilidades en grados precedentes, etc.; deficiencias que en la actualidad constituyen dificultades a las cuales se debe enfrentar sistemáticamente los profesores de Matemática en su accionar profesional.

Por otra parte, en entrevistas realizadas por los autores de este estudio, en sus funciones como metodólogo de Educación Matemática e investigadores educativos, se pudo constatar que los profesores que imparten esta asignatura declaran algunas preocupaciones a manera de paradojas, como:

- A pesar de estar en presencia de un claustro de experiencia los resultados en la Matemática Escolar no lo reflejan así.
- Aunque consideran que existen otros elementos asociados al proceso formativo de la Matemática en secundaria básica que influyen en sus resultados; muy pocos lo toman en cuenta por parecerles carentes de importancia.

De aquí resulta que, el análisis de la dinámica escolar ha venido tomando fuerza en lo que se ha dado en llamar evaluación institucional. Aunque es bueno distinguir que el seguimiento de las instituciones educacionales también ha sido enfocado desde el prisma del movimiento denominado Eficacia Escolar. Ambas vertientes del estudio del funcionamiento eficiente de las instituciones escolares constituyen guías en el accionar del perfeccionamiento de los sistemas educativos. A pesar de estos argumentos, los estudios que demuestran el impacto de factores de variadas naturalezas en la calidad del rendimiento de los estudiantes en asignaturas como Matemática, no garantizan la determinación de criterios particulares para un contexto determinado; para regular los esfuerzos en el logro de un proceso formativo con calidad, por cuanto la necesidad de orientar acciones para revisar los impactos de factores

El trabajo previo que ha inspirado esta Conferencia fue compartido con el Dr. en Ciencias Paul Antonio, TORRES FERNÁNDEZ, Investigador Titular del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

asociados al proceso formativo y su influencia en la calidad del aprendizaje, se convierten por su trascendencia, importancia y actualidad en una urgencia para la comunidad científica, permitiéndole precisar el siguiente cuestionamiento generador: *¿ cómo intervienen en las escuelas secundarias básicas urbanas -de Cuba- los factores asociados al proceso formativo de la Matemática en la calidad de su formación?*

Coherente con esta potencial indagación se encamina el siguiente trabajo, por lo que, en correspondencia con el problema planteado, se propone como objetivo general: determinar el nivel de conexión de los factores asociados al proceso formativo en las secundarias básicas urbanas con la calidad de la Matemática Educativa. Lo anterior fue posible desde un enfoque mixto y un alcance correlacional, utilizando los métodos tradicionales del nivel teórico y metodológico. El carácter expostfacto de la investigación y el procesamiento de la información mediante un integral trabajo de campo, en conjunto con la triangulación de la información les confiere a estas inferencias cualidades de validez y confiabilidad.

No es un secreto aceptar que las diferencias de los resultados escolares entre alumnos y alumnas están determinadas en gran medida por sus habilidades iniciales y la situación socioeconómica de su familia. Aunque, también es considerable la influencia que tienen las escuelas (y aulas) en dichos resultados, aspectos abordados de las investigaciones más contemporáneas. En una no despreciable cantidad de países se ha hecho común la práctica de aplicar cuestionarios orientados a recolectar información acerca de una enorme gama de variables relacionadas con las características de: aulas, escuela, profesores, familia y entorno donde viven los alumnos, junto con las pruebas de saberes académicos y logros educativos. La comunidad de investigadores educacionales a escala global ha considerado desde hace algunos años que, el análisis de los resultados que alcanzan los alumnos en sus calificaciones es una visión limitada para la comprensión de una realidad tan compleja como la que se engendra en las escuelas.

Tras lo anterior hay un gran intento de conocer a profundidad las regularidades que rigen el proceso educativo, en especial su ámbito didáctico y, por consiguiente, una evaluación permanente de las acciones emprendidas, dirigidas al aumento progresivo de un resultado exitoso a partir del conocimiento profundo de las regularidades de una amalgama de nexos verdaderamente significativos que interactúan y posibilitan un producto final susceptible de perfección. En la actualidad se fortalece una visión holística de la evaluación educativa, donde se resalta el papel de la escuela como marco globalizador de sus ámbitos; con lo que ha tomado fuerza el estudio de los centros escolares, en lo que se ha dado en llamar **Evaluación Institucional**. Ella centra sus esfuerzos en la elaboración de modelos teóricos que simplifiquen las complejas y numerosas interrelaciones que se establecen entre los elementos constitutivos de la entidad escolar.

Los estudios multinivel, como se denominan la cuarta etapa en la historia del Movimiento de Eficacia Escolar, se distinguían por ser superior a cualquier otra aproximación metodológica. En esta etapa, que aún no ha quedado claro que culminara se ha propagado por todo el mundo con una gran diversidad de enfoques metodológicos. Por lo general estos estudios están plateados con grandes muestras donde se utilizan tanto técnicas cuantitativas como cualitativas y donde dirigen su atención al aula. El interés por estimar la magnitud de los efectos escolares ha estado perennemente en la comunidad de investigadores desde que Coleman sostenía que este era prácticamente nulo. Pero es a finales de los ’90 cuando este punto se ha convertido en base para las investigaciones prácticas en este sentido. Tal es así, que en la amalgama de trabajos acontecidos hasta el momento se estiman que el centro escolar es capaz de explicar entre un 12 y un 18 % de la varianza del rendimiento de los alumnos.

Los centros escolares viven independientemente de su éxito, sin al menos identificar en qué consiste originalmente este. De manera general la calidad del aprendizaje de los estudiantes es el fin de las evaluaciones que se realizan en su seno. Aun así, y sabiendo que una parte sustancial del trabajo con los alumnos depende de la organización, de los medios, de las expectativas de los profesores y alumnos, de la intervención coordinada de la familia y del clima de la institución; por mencionar algunos factores. Estos factores asociados a un determinado fenómeno son variables explicativas y parten de los **Factores de Eficacia**: son aquellos rasgos que contribuyen a favorecer los propósitos de una entidad o institución, así como de los procedimientos utilizados por ella para desempeñar determinadas funciones con la disponibilidad racional de sus recursos materiales y humanos.

Desde una metódica estructurada en cinco fases principales: Fase I: Análisis documental y determinación de los factores de eficacia escolar más coincidentemente referidos. Fase II: Construcción o modificación de instrumentos de medición de los factores arriba seleccionados. Fase III: Selección de la muestra. Fase IV: Aplicación de los instrumentos (trabajo de campo). Fase V: Recopilación de la información y procesamiento estadístico. Para la descripción de los resultados se han distinguido dos momentos: en primer lugar, un grupo de resultados, denominado resultados colaterales, que orientaron este trabajo hacia la obtención de los factores de mayor coincidencia en la literatura. En un segundo paso se

El trabajo previo que ha inspirado esta Conferencia fue compartido con el Dr. en Ciencias Paul Antonio, TORRES FERNÁNDEZ, Investigador Titular del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

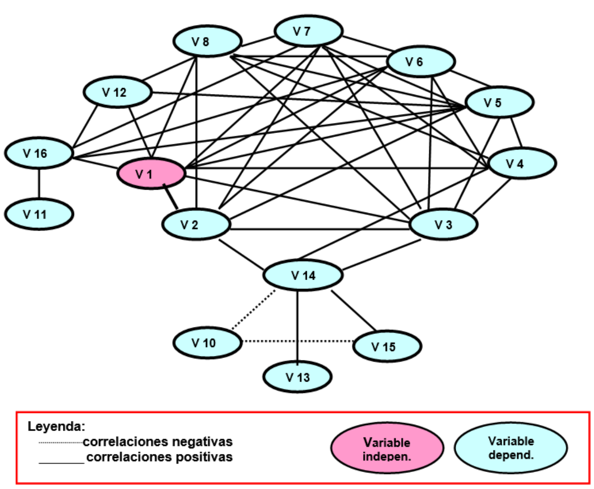
obtuvo la depuración final referente a los resultados esenciales para los factores de eficacia que serían emprendidos en el trabajo.

Se inició proceso de filtrado en un total de 24 investigaciones (13 iberoamericanas y 11 anglosajonas), las que se contrastaron con la propuesta por los equipos nacionales de investigación participantes en la *Investigación Iberoamericana sobre Eficacia Escolar* (IIEE). Se procesaron 58 factores de eficacia, ya que, se tuvieron en cuenta todos los que al menos tenían incidencia en dos trabajos. De un total de 313 consideraciones que se constataron en los factores de eficacia escolar, 140 corresponden a las investigaciones anglosajonas (44,7 %) y 173 se refieren a las iberoamericanas (55,3 %). Asociado a esto, se advierte que las investigaciones anglosajonas tienen como promedio 12,7 factores y las iberoamericanas 13, 3 factores, lo que sugiere un carácter más integrador en las primeras, en comparación con los productos de los investigadores de la región.

Los resultados iniciales se dirigieron a determinar, de manera general, el número de coincidencias en los factores de eficacia, resultando los siguientes: Clima del centro (79, 2 %), Expectativas del profesorado sobre el grupo de alumnos (75, 0 %), Metodología docente (75, 0 %), Existencia de objetivos consensuados (62, 5 %), Clima del aula (62, 5 %), Trabajo en equipo del profesorado (58, 3 %) y Estilo de Dirección eficaz (58, 3 %). Lo anterior indica que, de forma general, los factores de eficacia escolar de mayor utilización por los trabajos de origen anglosajón son: el nivel aula (55 %), de escuela (27 %) y el nivel alumno (18 %), de forma análoga tienen mayor inclusión los factores de proceso (91 %) con respecto a la de entrada (9 %). Por su parte, los estudios iberoamericanos orientan sus acciones más importantes a los niveles aula y escuela, de forma equitativa, las variables de proceso logran un mayor auge (55 %), y se le abre un espacio de mayor atención a las variables de tipo entrada (25 %).

Después de este análisis descriptivo documental se contrató con un Análisis Factorial corroborativo. Se consideraron entonces estas 73 variables y la referida al rendimiento para realizar un análisis factorial, lo que posibilitó explicar el efecto de cada una de las variables por separado y en conjunto. Resultaron 3 factores que interrelacionaban estas variables: V 1 Rendimiento académico. V 2 Atención a la diversidad estudiantil. V 3 Sistematización de los procedimientos. V 4 Curso de superación a los profesores sobre cambios curriculares. V 5 Mínimas interrupciones por atender a los alumnos de alto aprendizaje. V 6 Asistencia de los alumnos. V 7 Evaluación de trabajos individuales. V 8 Evaluación de trabajos en grupos. V 9 Relación del claustro con el Consejo de dirección. V 10 Seguimiento del director al aprendizaje de los alumnos. V 11 El día de trabajo está planteado para maximizar el aprendizaje. V 12 La escuela propicia la implicación de la familia en su organización. V 13 Calidad del tiempo lectivo. V 14 Actividades extraescolares. V 15 Realización de actividades en el tiempo libre de los alumnos. V 16 Autoestudio en sus viviendas. V 17 Organización de la casa de estudios.

Los resultados alcanzados desprenden una fuerte vinculación entre los aspectos referentes a las tareas en el aula, los cuales reaccionan unos con otros; lo que confirma la *hipótesis* de lo complejo que resultan los sucesos en la práctica educativa Matemática, así como los riesgos que pudieran ocurrir al estudiar la didáctica como un ente aislado Para iniciar el análisis en este núcleo relacional se debe señalar que se observan que aparecen piezas claves muy bien establecidas, que son las variables acreditadas como: *rendimiento académico, asistencia de los alumnos, evaluación de trabajos individuales, evaluación de trabajos en grupo, atención a la diversidad estudiantil, sistematización de los procedimientos empleados en clases y superación postgraduada de los profesores, específicamente en los cambios curriculares que operan en la actualidad en el nivel medio básico cubano.* Las principales interconexiones se asocian como muestra la **Figura 1.**



El análisis de este modelo, que describe la conexión de las variables más significativas en la dinámica de la escuela secundaria básica y, su impacto con el rendimiento académico en Matemática, lo que permite adentrarse en la naturaleza multifactorial que rige la práctica educativa en sí misma, se identifica un grupo de relaciones múltiples entre las variables de la 1 a la 8 cuyo referente se dirige al trabajo en el aula. De lo anterior se infiere que se aprecian variables que tiene una fuerte conexión (2, 3, 4, 6, 7, 5, 11, 12, 1, 14 y 16), y otras con una débil conexión (13, 9 y 17); en un estado intermedio se presentan las variables 8, 10 y 15. Se escogieron las variables que poseen correlaciones altas, destacando las correlaciones entre las variables más significativas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), como muestra el siguiente esquema.

…artido con el Dr. en Ciencias Paul Antonio, TORRES FERNÁNDEZ, Investigador Titular del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

Figura 1. Dinámica de las variables principales que inciden en la calidad del aprendizaje en la asignatura de Matemática de las escuelas secundarias básicas de Holguín (Cuba).

Para iniciar el análisis en este núcleo relacional se debe señalar que se observan que aparecen piezas claves muy bien establecidas, que son las variables acreditadas como: rendimiento académico, asistencia de los alumnos, evaluación de trabajos individuales, evaluación de trabajos en grupo, atención a la diversidad estudiantil, sistematización de los procedimientos empleados en clases y superación postgraduada de los profesores, específicamente en los cambios curriculares que operan en la actualidad en el nivel medio básico. Este grupo de variables actúa como los insumos esenciales para el accionar del profesor en el proceso pedagógico, quedando entonces la advertencia de que en aquellas escuelas (de la muestra estudiada) donde se favorece la asistencia de los alumnos, se potencian de forma frecuente las evaluaciones individuales y en grupo, se dedica tiempo para atender a la diversidad estudiantil, se hace énfasis en la sistematización de los procedimientos empleados en clases y su claustro orienta la superación hacia la profundización de los cambios curriculares que maniobran en la secundaria básica en la actualidad, entonces la calidad del aprendizaje en Matemática tiende a ser superior.

También se puede considerar que las actividades extraescolares inciden positivamente en la atención a la diversidad estudiantil y en la sistematización de los procedimientos empleados en clases. Es bastante factible explotar en las actividades extraescolares otras aristas que pueden ser *puntos fuertes* en alumnos un pobre desempeño en la Matemática Escolar; por ejemplo, se reconocen alumnos en la muestra con bajos resultados en Matemática, pero con buenas actitudes en el dibujo, lo que se utiliza como elemento a potenciar en las clases dándole una carga extra del componente geométrico, buscando la mejor comprensión de este estudiante. De forma similar sucede con la sistematización de los procedimientos en clases, al ponerlos en práctica en otro contexto. En contraposición a lo anterior se reconoce que, en aquellos centros donde el director le da mayor seguimiento al aprendizaje de los estudiantes, reacciona con mayor frecuencia de las actividades docentes presenciales, lo que limita la participación de los estudiantes de su escuela en actividades extraescolares y en actividades culturales y deportivas (considera que esto es lo más importante).

De igual forma, es necesario comentar la reacción positiva del rendimiento académico de los alumnos en aquellas instituciones educativas donde se propicia la implicación de la familia en tareas organizativas de la escuela, pues presupone un mejor entendimiento hogar-escuela, lo que complementa las tareas escolares que se desarrollan en el centro educativo. De manera análoga pasa con el autoestudio pues, en consecuencia, aquellos alumnos que mayores hábitos de estudio (que casi siempre lo generan las familias que tienen mejores relaciones con la escuela) tienen por lo general alcanzan los mejores resultados. En correspondencia, se subraya la relación del autoestudio con los resultados de las evaluaciones individuales y al mismo tiempo con la asistencia escolar. Parece que, de alguna manera, el hecho de que el alumno se sienta preparado lo motiva más a participar en las actividades escolares; como manifestación del reconocimiento en este sentido en su grupo estudiantil.

Es válido llamar la atención en que la calidad del tiempo lectivo es importante para las actividades extraescolares y éstas, a su vez, se conectan favorablemente con la atención a la diversidad estudiantil (como se ha expresado anteriormente), lo que significa que en las escuelas donde las actividades extraescolares se conciben de manera que faciliten a remediar las dificultades en grupos de estudiantes, presupone una implicación decisiva en los resultados posteriores en la calidad del aprendizaje, sin olvidar el papel del autoestudio como consecuencia de la orientación de actividades para la casa, lo que califica el día de trabajo en la escuela, para maximizar el aprendizaje.

Del análisis antes presentado, que revelan cualidades esenciales en el orden teórico y metodológico de los factores asociados a la formación Matemática en las Escuelas Secundarias Básicas Urbanas cubanas, contribuyeron a situar juicios generalizables a considerar como conclusiones. En ese sentido, se ha determinado el nivel de conexión de los factores de eficacia escolar más importantes asociados al rendimiento en la asignatura Matemática de los alumnos de las escuelas secundarias básicas urbanas de Holguín, propósito logrado en este estudio. Lo anterior fue posible a partir de la metodología de investigación empleada; conformada por un conjunto de fases que favorecieron la organización y materialización de múltiples técnicas necesarias para recopilar y procesar la información. En otro orden, se introdujo una caracterización de factores de eficacia, elemento esencial para abordar el contenido del estudio. De esta forma, se establecieron factores (escolares y sociales) fundamentales. Desde la perspectiva práctica, se llevó a cabo una fase de ajuste o elaboración de instrumentos a partir del despliegue de los factores en distintos niveles (alumno, aula, escuela). Especial atención se le atribuyó a la recopilación e interpretación de los resultados con el auxilio de recursos estadísticos apropiados. Finalmente, se verificó el carácter multifactorial del proceso formativo, en general, y del proceso de aprendizaje de la Matemática Escolar en el nivel de enseñanza estudiado, en particular.

El trabajo previo que ha inspirado esta Conferencia fue compartido con el Dr. en Ciencias Paul Antonio, TORRES FERNÁNDEZ, Investigador Titular del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

En consecuencia, una característica de esta investigación ha sido que observar a la Didáctica de la Matemática no como un proceso aislado, sino por el contrario, como un componente de un proceso multifactorial; que de obviarse puede conducir a una posición de riesgo en el empeño del perfeccionamiento educativo. Dicho lo anterior y con la mirada puesta en futuras investigaciones, se resalta que: a) Investigadores a escala internacional y nacional han trabajado en la búsqueda de posibles soluciones a las dificultades que entraña el proceso formativo de la Matemática, sin embargo, la cantidad de trabajos dirigidos a medir el impacto que tienen los factores asociados al rendimiento académico del estudiante en esta asignatura es limitado. b) La Metodología utilizada para materializar la recopilación de la información constituye un marco adecuado que facilita el revelado de los factores mediante un proceso de selección de factores de eficacia a partir de fuentes documentales primero, la construcción o modificación de un grupo reducido de instrumentos, su aplicación y la recolección y procesamiento de la información obtenida.

Por último, es digno indicar que en el desarrollo de esta investigación han quedado algunas interrogantes que se apartan del campo de acción, pero que exhortan a generar otras investigaciones en torno a la Didáctica de la Matemática y en particular, en la incidencia de los factores asociados al aprendizaje de los alumnos en complejos de materia de difícil asimilación, medición de la incidencia familiar en los resultados académicos de los alumnos, cómo se derivan estos factores en la forma de enseñanza combinada (Lorenzo, 2021), y tener en cuenta otras variables de producto.

Referencias Bibliográficas

Blanco, L. (1991) Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de profesores de E. G. B. Y estudiantes para profesores. Manuales Unex, No. 11. Madrid.

Lorenzo, R. (2004). Factores asociados a la calidad de la formación Matemática en las Escuelas Secundarias Básicas. Tesis en opción del título de Master en Ciencias de la mención de Didáctica de la Matemática. Universidad de Holguín, Cuba.

Lorenzo, R. (2021) Formaciones educativas híbridas y resiliencia didáctica en modo confinamiento: alternativas y proyecciones. Editores: Piedrahita, C. L., Vommaro, P., Perea A. J., Riveros H. J. En Conversaciones desde el encierro: aproximaciones críticas al acontecimiento pandémico. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas: CLACSO: Editorial Magisterio, pp. 147-158. ISBN: 978-958-20-1386-8. http://biblioteca.clacso.edu.ar/clacso/se/20210527035104/Conversaciones-encierro.pdf

El trabajo previo que ha inspirado esta Conferencia fue compartido con el Dr. en Ciencias Paul Antonio, TORRES FERNÁNDEZ, Investigador Titular del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO A TRAVÉS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y PROYECTOS DE APRENDIZAJE

Cassio Cristiano GIORDANO
Universidade Federal do Rio Grande, Brasil
ccgiordano@furg.br

Resumen

El aprendizaje de Estadística y Probabilidad implica el desarrollo de tres competencias básicas principales: pensamiento estadístico, alfabetización estadística y razonamiento estadístico. Para muchos investigadores, y me incluyo entre ellos, es prácticamente imposible desarrollar uno de ellas sin movilizar y desarrollar las otras dos. En este trabajo, el foco estará en el pensamiento estadístico y su exploración a través de metodologías activas de aprendizaje, como la Modelización Matemática (MM) y el Proyecto de Aprendizaje Estadístico (PAE). Este texto se trata de un ensayo teórico, pero está respaldado por mis treinta años de experiencia docente en salón de clases, con estudiantes de secundaria, así como mi experiencia académica, en los estudios de maestría, doctorado y posdoctorado, este último finalizado en 2022, siempre investigando la implementación, gestión y desarrollo de proyectos de aprendizaje. El marco teórico adoptado es el Análisis Exploratorio de Datos (AED) que, como sostienen algunos investigadores, es una filosofía de investigación que ha guiado la enseñanza y el aprendizaje estadístico que valoran el protagonismo exploratorio, en detrimento de un enfoque más técnico y procedimental. Para ilustrar mi posición, traigo como resultados de investigación dos trabajos brasileños, el primero en el campo de MM y el segundo, de mi grupo de investigación, sobre el desarrollo del PAE, siguiendo los preceptos del Ciclo de Investigación Investigativa, uno de las cuatro dimensiones del Pensamiento Estadístico.

Palabras-clave: Pensamiento Estadístico - Modelización Matemática - Proyectos de Aprendizaje – Ciclo Investigativo de la Investigación.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje estadístico se basan en un trípode estable, que o constituye la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadísticos (Campos, 2007, Silva, 2007, Fernandes, 2020). La alfabetización estadística, según Gal (2002), implica la capacidad de interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los datos relacionados con argumentos o fenómenos estocásticos, que se pueden encontrar en diferentes contextos, así como la capacidad de tejer argumentos y expresar reacciones con base en informaciones estadísticas, como su comprensión del significado de la información, posicionándose al respecto.

Gal (2021) reconoce dos conjuntos de elementos en el proceso de desarrollo de la alfabetización estadística, los de carácter cognitivo, a saber: conocimiento sobre la lengua materna, sobre matemáticas, sobre estadística, sobre el contexto investigado y la capacidad de elaborar cuestionamientos críticos, y las disposicionales, relacionadas con la afectividad, que son creencias, actitudes y postura crítica.

El pensamiento estadístico, según Campos (2007) corresponde a la capacidad de relacionar datos cuantitativos con situaciones concretas, reconociendo la omnipresencia de la variabilidad y la incertidumbre. Ocurre cuando se asocian modelos matemáticos a problemas realistas, contextualizados y se eligen adecuadamente las herramientas estadísticas. Una característica particular del pensamiento estadístico es brindar la habilidad de ver el proceso de manera global a lo largo del proceso de construcción del conocimiento.

El razonamiento estadístico, a su vez, es definido por Garfield (2002) como la forma en que las personas razonan con ideas estadísticas y dan sentido a las informaciones de esta naturaleza. Es una comprensión conceptual que abarca ideas estocásticas fundamentales como distribución, centro, dispersión, asociación, incertidumbre, aleatoriedad y muestreo. Él requiere comprensión (ver un problema dado como similar a una clase de problemas), planificación y ejecución (aplicar métodos apropiados para resolver el problema) y evaluación e interpretación (interpretar el resultado en relación con el problema original).

Las tres competencias están relacionadas con los procesos investigativos en Estadística, pero nos ceñiremos al pensamiento, que presenta como una de sus dimensiones el Ciclo de Investigación Investigativa, que, según Batanero y Díaz (2004, 2011), condiciona la promoción del protagonismo estudiantil, en una perspectiva exploratoria.

Referenciales Teóricos

Asumimos el marco teórico del Análisis Exploratorio de Datos (AED) y su aproximación a la Modelación Matemática (MM) y con el Proyecto de Aprendizaje Estadístico (PAE), para la valoración de la postura crítica investigativa. La AED surge en la década de 1960, a partir de trabajos pioneros como los del estadístico americano John Wilder Tukey (1977). Él propuso a los estadísticos explorar los datos y formular hipótesis que pudieran conducir a nuevas recopilaciones de datos y experimentos, sin depender de un modelo estadístico preestablecido, extrapolando modelos y pruebas estadísticas tradicionales, con el fin de extraer de los datos la mayor cantidad posible de información, apuntando a modelos plausibles para ser utilizados en etapas posteriores. Correspondería al investigador comenzar su análisis examinando los datos disponibles, para luego definir las técnicas más apropiadas para resolver los problemas.

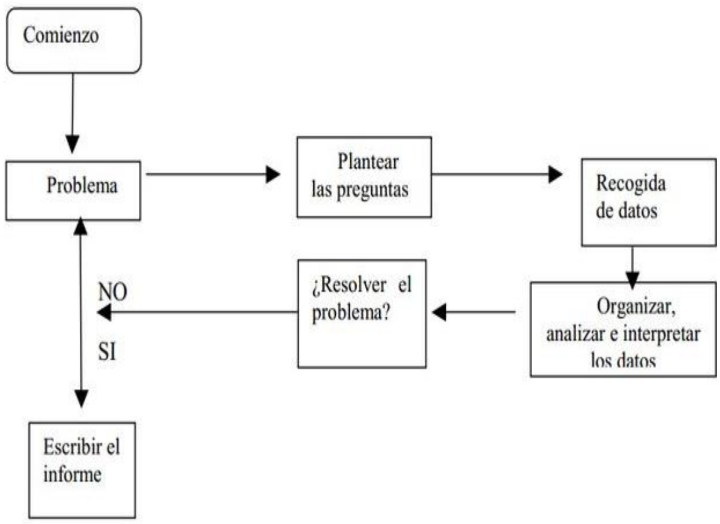
El AED nos proporciona un amplio repertorio de métodos para un estudio detallado de los datos antes de adaptarlos. Esta propuesta se destacó en el contexto de la transición de una perspectiva tecnicista de la Estadística y la Probabilidad, que sobrevaloraba el aspecto matemático, a una perspectiva analítica, que buscaba construir modelos a partir del estudio de los datos observados. La AED trata de ser más accesible, motivadora y creativa, imbuida del espíritu investigador que caracteriza a toda producción científica.

Batanero, Estepa y Godino (1991) destacan su potencial para crear situaciones de aprendizaje sobre temas de interés de los estudiantes, a partir de representaciones gráficas que favorezcan la percepción de la variabilidad, la evaluación de medidas de orden que minimicen los casos inusuales, el uso de escalas diferentes y la falta de necesidad de una teoría matemática compleja, con herramientas innecesarias para la etapa de aprendizaje en el campo. Esta creación requiere el desarrollo del pensamiento estadístico.

El pensamiento estadístico involucra estrategias mentales directamente asociadas con los procesos de toma de decisiones en todas las etapas del ciclo investigativo. Snee (1990) reconoce la omnipresencia de la variabilidad en los procesos de identificación, caracterización, cuantificación y control de variables estadísticas. En este sentido, podemos asociar el pensamiento estadístico con la idea de variación, más concretamente con la producción y análisis de datos y la toma de decisiones.

Wild y Pfannkuch (1999) afirman que el pensamiento estadístico se basa en cuatro dimensiones: ciclo investigativo, ciclo interrogativo, tipos de pensamiento y disposiciones. El ciclo investigativo se refiere a la forma de actuar y pensar durante una investigación estadística, adaptada al PPDAC (problem, plan, data, analysis, conclusions). Dicho ciclo tiene como objetivo resolver problemas reales, generalmente con la intención de cambiar un sistema para mejorarlo. La calidad de este ciclo también dependerá del conocimiento del contexto en el que se desarrolla la investigación. Batanero y Díaz transponen este modelo del ciclo investigativo del pensamiento, propio de un individuo, al ciclo investigativo de la investigación:

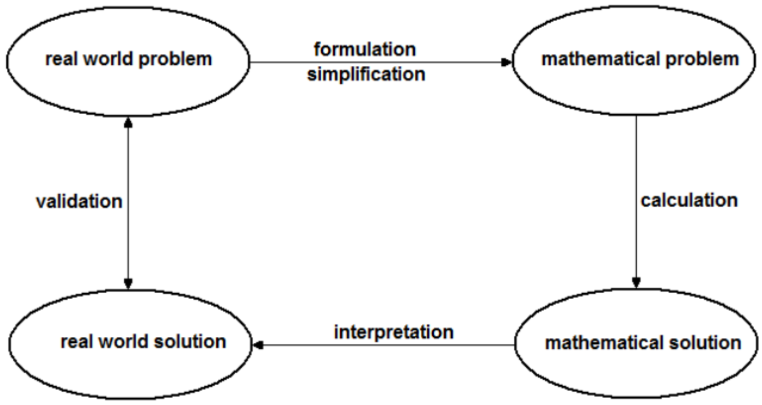
Figura 1. Esquema del desarrollo de un Proyecto



Fuente: Adaptado de Batanero y Díaz (2004, p. 134).

Para Batanero y Díaz (2004), los proyectos estadísticos los motivan, que se difieren de la simple resolución de largas listas de ejercicios repetitivos y descontextualizados. Estos autores retoman las ideas de Cobb y Moore (1997), según las cuales la Estadística es la ciencia de los datos, y estos no son sólo números, sino números en contexto. Batanero y Díaz (2011) destacan que el desarrollo de proyectos, en contextos realistas, contribuye a la adquisición de las siguientes habilidades, que son fundamentales para los estudiantes, tales como: competencia lingüística comunicativa, competencia matemáticas, competencia para el reconocimiento y la interacción con el mundo físico, competencia para el tratamiento de la información, competencia digital, competencia social para ejercer la ciudadanía, competencia para "aprender a aprender", competencia para cuestionar críticamente y competencia para lograr la autonomía y la iniciativa personal. Tales competencias son necesarias para el desarrollo de los componentes cognitivos y actitudinales de la alfabetización estadística.
El desarrollo del Proyecto de Aprendizaje Estadístico (PAE) permite la exploración del conocimiento estadístico, en contextos significativos para los estudiantes, así como técnicas y estrategias de gran relevancia para la formación del ciudadano crítico, en un enfoque más rico y complejo que el ofrecido en los libros de texto. Batanero y Díaz (2011) destacan las diferencias entre saber y poder aplicar el conocimiento. Aplicarlos suele ser mucho más difícil de lo que parece, porque requiere no solo de conocimientos técnico-procedimentales (cómo elaborar un gráfico o calcular una media), sino también de conocimientos estratégicos (saber elegir el mejor tipo de gráfico, según la naturaleza de las variables y con lo que se pretende resaltar a través de ella). Para comprender mejor esta ciencia, es necesario desarrollar la alfabetización estadística (Gould, 2017; Gal, 2021).
Para la promoción de la alfabetización estadística, Porciúncula (2022) sugiere la implementación del (PAE) cuyo el desarrollo comprende los pasos: definición del tema (en vista del interés y preocupaciones de los sujetos de investigación), recolección y organización de datos (a través de una survey); análisis estadístico y discusión de resultados entre los miembros del grupo; presentación/difusión de resultados, con el intercambio de información. En este proceso, el estudiante experimenta el papel de investigador, de gran importancia para la apropiación de los procesos de construcción del conocimiento científico, para el perfeccionamiento de la criticidad y el pleno ejercicio de la ciudadanía, para la convivencia en una sociedad democrática y clara, en un ambiente de justicia social. El apoyo del docente, como mediador de interacciones en el entorno didáctico, como gestor del desarrollo del PAE es fundamental.
El desarrollo del PAE no dista mucho de la propuesta de MM presentada por Campos:

Figura 2. Esquema del proceso de Modelización Matemática



Fuente: Campos (2016, p. 43).

Según Campos (2007), la Modelación Matemática se vuelve coherente con los presupuestos de la Educación Estadística al conjugar la idea de aprender estadística haciendo Estadística a través del estudio, investigación, análisis, interpretación, crítica y discusión de situaciones cotidianas del estudiante o situaciones reales. Mientras que las ventajas de trabajar con Modelización, Perin (2019) menciona su efectividad para significar conocimientos matemáticos asociándolos a problemas reales. Funciona como un motivador del proceso de enseñanza y aprendizaje, porque la elección del tema y el problema a investigar la decisión de los estudiantes.

Metodología

Realizamos una investigación cualitativa, en la perspectiva de Creswell y Creswell (2021), en el enfoque metodológico del estudio documental bibliográfico, analizando la tesis doctoral de Evangelista (2015) sobre MM y la enseñanza de la Estadística, y nuestra investigación posdoctoral, con una próxima publicación, sobre el desarrollo del PAE en la Educación Básica.

Resultados y discusiones

Comencemos nuestra discusión con MM. Uno de sus mayores pioneros en Brasil, Rodney Bassanezi, considera esta metodología de enseñanza como un proceso dinámico para obtener y validar modelos matemáticos, el “arte” de transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos cuyas soluciones deben ser interpretadas en el lenguaje habitual. Bassanezi (2012) agrega que MM es el proceso de creación de modelos donde se definen las estrategias de acción del individuo sobre la realidad, más específicamente sobre su realidad, cargadas de interpretaciones y subjetividades propias de cada modelador. Ella busca conjugar la experiencia de enseñanza con la perspectiva modeladora, buscando conjugar, de la mejor manera posible, preocupaciones teóricas, filosóficas y metodológicas.

Según Bassanezi (2011), la mayor dificultad para los profesores de matemáticas que adoptan la MM es la transposición de la barrera creada naturalmente por la enseñanza tradicional, donde el objeto de estudio está casi siempre bien delimitado, obedeciendo a una secuencia de prerrequisitos y que prevé un claro horizonte de llegada, que suele materializarse en el ideal de cumplir con el programa curricular de la disciplina. Biembemgut (2009) agrega al MM parte de una situación-problema significativa y busca resolverlo utilizando teorías matemáticas. Es un proceso que consiste en ordenar los datos de un fenómeno o cuestión investigada de acuerdo con alguna estructura matemática que permita representarlos y, principalmente, posibilitar una descripción, una respuesta o solución plausible, una predicción.

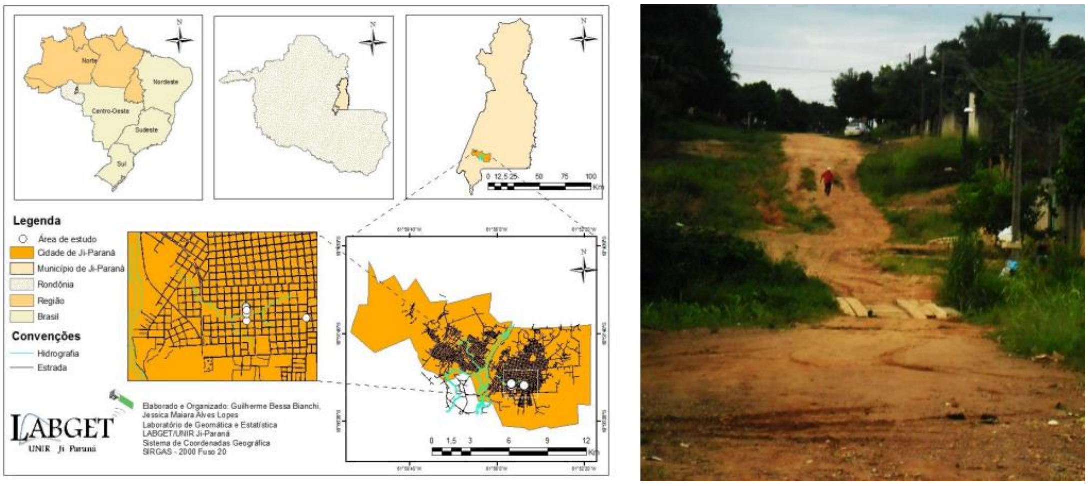
Mendonça (2008) ve una gran proximidad entre la MM y el abordaje por proyectos, en el campo de la Educación Estadística. El contenido estadístico o matemático en los proyectos, son estudiados según sea necesario. En este sentido, se ve en la perspectiva de proyectos de trabajo las condiciones favorables para implementar el proceso de Modelamiento Matemático para el estudio de conceptos estadísticos.

Evangelista (2015) considera que podemos extendernos a la Estadística desde los presupuestos teóricos de la MM, pues también nos preocupa crear un ambiente de aprendizaje que permita a los estudiantes ampliar conocimientos, reflexionar y debatir sobre temas reales, explorar nuevos caminos, con crítica y creatividad, al relacionar conocimientos estadísticos concernientes con situaciones con referencia a la realidad. Sin embargo, él señala algunas peculiaridades de la Modelación Estadística: en Estadística, el contexto motiva los procedimientos, siendo fuente y base de interpretación; el aprendizaje tradicional de las Matemáticas es diferente al de la Estadística, que se caracterizan por la indeterminación, el desorden o la limitación del contexto; en Matemáticas existe la necesidad de aplicar cálculos precisos o la realización de procedimientos, mientras que Estadística valora el uso selectivo de instrumentos tecnológicos y software cada vez más sofisticados; la naturaleza fundamental de muchos problemas estadísticos es que no tienen una única solución matemática; La estadística permite a los estudiantes presentar descripciones, juicios, inferencias y opiniones reflexivas acerca de los datos, siendo esencial la argumentación. Hay una diferencia fundamental entre la Educación Matemática y la Educación Estadística; mientras que el primero busca operar con fenómenos reales e imaginarios, teniendo en cuenta la ubicuidad de la variabilidad y la aleatoriedad, el segundo busca resumir información grupal para explicar e inferir sobre estos fenómenos, en una perspectiva más determinista.

Él realizó una investigación exploratoria que tuvo como objetivo discutir y analizar el impacto del trabajo con proyectos de Modelación Estadística (SM) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística en la carrera de Ingeniería Ambiental, considerando la perspectiva sociocrítica de la educación, a la luz de la Crítica de la Educación Estadística. Los temas seleccionados por sus alumnos para desarrollar la ME fueron residuos sólidos orgánicos, relleno de brechas, caudal ecológico, curva de permanencia, incendios y deforestación, recolección selectiva, cuantificación de erosión pluvial, práctica de quemas urbanas, densidad de población, teledetección, extracción de arena, tratamiento de agua, consumo consciente de agua, percepción de erosión, disposición final de residuos sólidos, disposición final de aceite de cocina, y malaria.

Un grupo compuesto por dos estudiantes que vivían en una calle con problemas de erosión pluvial optó por trabajar con este tema. El trabajo desarrollado por ellos tuvo como objetivo realizar el análisis del movimiento de masas en el talud del Igarapé Riachuelo. Utilizando los conocimientos adquiridos en la disciplina de la teledetección, donde utilizaron el sistema de coordenadas geográficas (SIRGAS - 2000), los estudiantes realizaron la Figura 1 para apuntar el lugar donde se realizó el estudio y, luego, la foto de la calle desde donde recogieron los dados. El talud estudiado es un área de captación de agua de lluvia de la cuenca del Igarapé Riachuelo (figura 3).

Figura 3. Ubicación del estudio: Calle João Goulart



Fuente: Adaptado de Evangelista (2015)

Al principio, los estudiantes buscaron formas de cuantificar el proceso de erosión, así como calcular el volumen de lluvia. Buscaron al profesor de Hidrología que les ayudó a hacer un pluviómetro para que pudieran tomar datos de la cantidad de lluvia, una fabricación artesanal y empírica, con una botella de PET (Polietileno tereftalato), cortada por la mitad, en que la parte del cuello es usado como un embudo, unido por cintas con la otra parte de la botella. El pluviómetro se instaló en una estaca a 1,50 metros del suelo, con clavijas graduadas en medidas iguales y se introducidas en el suelo por impacto hasta alcanzar una determinada medida, la misma para todos. Se verificó cuánto la erosión retiró sedimentos, debido a la mayor exposición de los pines en la superficie. También se puede usar pilotes para verificar la acumulación de sedimentos, por ejemplo, en el fondo del valle, cuando los pernos se cubren gradualmente. Luego se mide la pendiente o elevación del terreno en centímetros. Se utilizaron tres estacas de madera de igual tamaño, marcadas a 15 cm de la parte puntiaguda. Las estacas se introdujeron en el suelo dentro de la erosión con una distancia de 8,68 metros entre sí. Los asuntos estadísticos abordados en el trabajo realizado por este grupo fueron: análisis de regresión lineal, correlación lineal, prueba t de Student y el Prueba No Paramétrica: prueba de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, siendo que esta última no estuve presente en el programa de la asignatura. Los estudiantes, al investigar artículos relacionados con el tema que estaban trabajando, observaron que para realizar el análisis de los resultados era necesario que los datos cumplieran con algunos supuestos, entre ellos el de normalidad, es decir, los datos debían seguir una distribución normal. Después de investigar, concluyeron que las pruebas más utilizadas fueron la prueba de χ^2 y la prueba de Kolmogorov-Smirnov, siendo la prueba K-S la más citada. El maestro preguntó si había alguna razón específica para que los estudiantes usaran la prueba K-S en lugar de la prueba χ^2. Ellos dijeron que la prueba de Kolmogorov-Smirnov era realmente recomendable para el tipo de datos que recogían, ya que las variables son continuas y hay pocos datos muestreados.

Al realizar el análisis, no encontraron una correlación lineal entre el volumen de lluvia y la erosión, lo que causó sorpresa, ya que este resultado iba más allá del sentido común, es decir, cuanto más llueve, mayor es la fuerza del agua que fluye en la calle, mayor es la cantidad de sedimento que se extrae del suelo y provoca una mayor erosión. Después de discutir entre ellos, se dieron cuenta de que el valor cero, que pusieron para simbolizar que la medición en los pilotes, no podría ocurrir, lo que significaba pérdida de datos y no falta de erosión. La solución que encontraron fue revisar sus hojas de trabajo de anotaciones de recopilación de datos y eliminar las columnas donde se anotaba: medición no tomada. Se dieron cuenta de que el método de medición de la erosión utilizado, a pesar de haber sido aplicado en un artículo de Ross y referenciado por otros autores en el área, cuando lo aplicaban estos no era tan efectivo. En su caso, el lugar donde se colocaron las pilas se llenó de agua y no se pudo realizar la medición, ya que la pila estaba sumergida. Cuando se les preguntó cómo evitar el problema de las medidas faltantes, concluyeron que necesitarían pilotes más grandes o deberían arreglar dos pilotes fuera de la zanja formada por la erosión, conectados por una línea y medir la distancia entre la línea y el fondo de la zanja. Los estudiantes discutieron acerca del método utilizado por los autores investigados y observaron que, en su contexto, el método debe ser adaptado o no puede ser utilizado. Esto desafía la ideología de la certeza, ya que los estudiantes visualizaron un método defectuoso para su investigación, lo que cuestiona la posibilidad de un método infalible. También se dan cuenta de que la Estadística no puede ser tomada como un conocimiento listo y acabado, sino como un conocimiento vivo, dinámico, que se va construyendo, y de acuerdo a las necesidades sociales, propias de ese grupo, se pueden concebir nuevos conocimientos. La disciplina de Estadística II desde proyectos y Educación Estadística Crítica utilizó las experiencias, intereses y objetivos de los estudiantes, contribuyendo no solo a aprender a aplicar fórmulas ya preparadas, sino también a conjeturar hipótesis en la búsqueda de soluciones e interpretaciones.

Pasemos ahora al desarrollo del PAE. Realizamos una investigación cualitativa, desde la perspectiva de Creswell y Creswell (2021), del tipo estudio de caso, según Yin (2015). Los sujetos involucrados en la investigación fueron seis docentes, con formación en diferentes áreas, con clases asignadas a una clase de 2° año de los Años Iniciales (niños de siete u ocho años) y dos clases de 7° y 8° año de Enseñanza Básica (con edades 12 a 14) de tres escuelas públicas brasileñas. Fueron invitados a integrarse al programa LeME - Alfabetización Multimídia Estatístico, en 2021. Este programa fue creado en 2011 y es desarrollado desde 2012 por investigadores de la Universidad Federal de Rio Grande (FURG), buscando promover la transformación social a través de prácticas pedagógicas lúdicas y contextualizadas. El objetivo principal de este programa es promover la alfabetización estadística de los estudiantes de Educación Básica, mediada por las Tecnologías Digitales de la Información y la Comunicación (TDIC), haciéndolos más capaces de leer de manera autónoma y crítica la información estadística que es transmitida por los más diversos medios.

La primera fuente de información analizada en esta investigación fueron registros audiovisuales de reuniones semanales realizadas, en el segundo semestre de 2021, con investigadores y profesores, en grupo colaborativo, a través de Google Meet. La segunda fuente de material para análisis corresponde al apoyo continuo a distancia: dos grupos de tutorías, creados vía WhatsApp, con investigadores, docentes y estudiantes; y las reuniones periódicas en las dos escuelas de Últimos Años de Educación Primaria, también a través de Google Meet, una con frecuencias semanales y otra quincenal. Nuestra penúltima fuente de material para análisis consistió en grabaciones de presentaciones de los resultados finales de los proyectos, por parte de los estudiantes y sus profesores. Finalmente, obtuvimos datos para el análisis de un grupo focal (GF) realizado al final del trabajo, en la primera quincena de diciembre. En esta reunión, a la que asistieron todos los docentes implicados, además de los investigadores, se plantearon algunas cuestiones concretas sobre la metodología docente del PAE: ¿Cómo te has sentido a lo largo del proyecto? Cuéntanos brevemente ¿cómo fue el desarrollo de LeME? ¿Observaron aspectos interdisciplinarios en el desarrollo del Proyecto? ¿Hubo relación con Matemáticas, Portugués y Lenguas Extranjeras, Historia, Geografía, Artes, Religión, Educación Física u otros componentes curriculares? En su opinión, ¿cómo se sintieron los estudiantes? ¿Fue lúdico para ellos? A partir de las experiencias vividas en LeME/MoSaiCo, ¿qué saberes docentes considera que se han movilizado y/o producido en este proceso? ¿Qué conocimientos considera que faltan por desarrollar, ante la continuidad en la realización del LeME en la escuela, en otros momentos? ¿Qué habilidades estadísticas notó que desarrollaron los estudiantes? Después de todo este tiempo de lecturas, talleres, dinámicas e intercambio de experiencias, ¿nos puede decir si fue posible desarrollar la construcción del conocimiento estadístico (requisitos)? ¿Los temas autorales (elegidos por los propios alumnos) permitieron acercar la cultura adolescente y juvenil a la cultura escolar? Con estos temas, ¿hubo profundización del aprendizaje y construcción de la autonomía/protagonismo de los estudiantes? ¿Qué ha cambiado en tu forma de ver la Estadística, tras tu experiencia con LeME? ¿Cree que el aprendizaje basado en proyectos puede contribuir a la optimización de tiempo y recursos, incluyendo la articulación de los componentes curriculares? Si tuviera que comenzar su investigación ahora, dada esta experiencia interdisciplinaria, ¿qué asociaciones buscaría, en términos de componentes del plan de estudios y compañeros de trabajo? ¿Buscaría asociaciones externas?

Con este material reunido, comenzamos nuestro análisis. En esta tarea contamos con el soporte tecnológico de NVIVO, versión 12.7, un software de análisis cualitativo que, entre sus muchos recursos, contribuye al análisis textual, análisis léxico y análisis de *cluster*. El PAE estuve asociado al mayor compromiso de los estudiantes durante el aislamiento social, producto de la pandemia del COVID-19 y la implementación de la Enseñanza Remota de Emergencia (ERE) que acercó a la comunidad escolar, no solo en el momento final de la presentación de los alumnos, así como a través de la formación docente colaborativa continua. Además, presenciamos una gran interacción entre profesores, estudiantes e investigadores en los grupos de tutoría. Estos investigadores ofrecieron un apoyo técnico estratégico, manteniendo un canal continuo de comunicación con todos los involucrados en los procesos educativos.

Para los estudiantes esta fue la primera experiencia de desarrollo de la investigación estadística a través del ciclo investigativo de investigación, una de las dimensiones del pensamiento estadístico, participando desde la elección del tema, elaboración del instrumento de recolección de datos hasta el análisis final y difusión de los resultados de su investigación.

En cuanto a la segunda dimensión del pensamiento, de Wild y Pfannkuch (1999), el ciclo interrogativo, un proceso genérico del pensamiento y constante durante la resolución de un problema estadístico, relacionado con plantear interrogantes en los niveles macro y micro de la investigación, las investigaciones de los estudiantes les permitió mejorar los elementos: generación de ideas, búsqueda de información, interpretación, crítica y juicio. Este último implica cuestionar la confiabilidad de la información, la utilidad de las ideas, la practicidad de los planes, el cumplimiento del contexto y la comprensión estadística, y la necesidad de más investigaciones.

La tercera dimensión del pensamiento, de Wild y Pfannkuch, tipos de pensamiento, se contempló con el desarrollo del pensamiento general, relacionado con la planificación del ciclo investigativo, estructurando estrategias de investigación, y la del pensamiento fundamental, con sus cinco elementos (es compuesto por cinco elementos, a continuación, se discutirán las características de cada uno de ellos). Reconocimiento de la necesidad de datos, al aceptar la propuesta de participar voluntariamente en la investigación estadística, en las horas extras del horario regular de clase, aun sabiendo que contarían para sus calificaciones escolares; transnumeración, al transformar, convertir y representar datos a través de registros numéricos, algebraicos, figurativos, tabulares, gráficos; reconocimiento de la ubicuidad de la variabilidad, uso de modelos estadísticos, creados con el apoyo de docentes y, investigadores socios; conocimiento del contexto, conocimiento estadístico y de síntesis, que consiste en tener claro que la calidad de toda investigación estadística depende de la articulación de conocimientos de diferentes naturalezas.

Por fin, la cuarta dimensión del pensamiento estadístico: disposición, asociada a categorías de cualidades personales, como curiosidad y cuestionamiento, compromiso, imaginación, escepticismo, razonamiento lógico y deseo de aprender.

Ver la reapertura de las escuelas, culminando con el evento de difusión de los datos de la investigación de los estudiantes, con la presencia de toda la comunidad escolar, pudiendo registrar en audiovisual y a través de un libro, con las narrativas de los docentes, junto con el análisis de los investigadores, fue gratificante, en palabras de estos profesionales. Para los docentes, desarrollar el PAE en medio de la pandemia fue una oportunidad para reinventarse, deconstruyendo y reconstruyendo saberes, estableciendo alianzas, colaborando, compartiendo conocimientos y sentimientos, y, sobre todo, atreviéndose.

Ellos comenzaron a ver la Estadística de una manera diferente, dándose cuenta de que sabían mucho más de lo que imaginaban al ayudar a sus alumnos a construir gráficos estadísticos, con el apoyo tecnológico de múltiples recursos computacionales e incluso en el entorno de papel y lápiz, en la lectura e interpretación de tablas. De distribución de frecuencias, en la redacción y revisión de los argumentos de los estudiantes, basados en datos científicos, especialmente en los momentos que anteceden a la presentación de los resultados de sus investigaciones. Uno de los puntos más importantes a destacar aquí es el reconocimiento por parte del docente de la necesidad de buscar alianzas, para mantener la oferta de educación permanente. Esperamos haber contribuido, con nuestra investigación, a profundizar la reflexión sobre el cambio de concepciones docentes, a través de propuestas cooperativas y colaborativas, en el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje estadístico.

Conclusiones

La enseñanza y el aprendizaje de la Estadística, desde la perspectiva del Análisis Exploratorio de Datos, requiere compromiso del estudiante, postura investigativa, articulación de conocimientos estadísticos y matemáticos en contextos realistas, con la expresión de ideas a través de argumentos consistentes, basados en evidencia estadística, en datos estadísticos. Esta argumentación requiere dominio lingüístico y capacidad de cuestionamiento crítico a partir de creencias, valores, concepciones, actitudes y posturas críticas, que revelan un conocimiento más profundo del mundo, a través de una forma peculiar de leer a las personas, cosas y fenómenos que nos rodean. Tales habilidades y competencias pueden mejorarse a través de metodologías de enseñanza activa, como la Modelación Matemática y el Proyecto de Aprendizaje Estadístico, basados en el Ciclo de Investigación Investigativa, una de las cuatro dimensiones del Pensamiento Estadístico.

Referencias Bibliográficas

Bassanezi, R. C. *Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2011.

Bassanezi, R. C. *Temas e modelos*. São Paulo: Editora Unicamp, 2012.

Batanero, C. & Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas*, 125-164. Zaragoza: ICE.

Batanero, C. & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C.; Estepa, A. & Godino, J. D. (1991). Análisis Exploratorio de Datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.

Biembengut, M. S. (2009). 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Revista Alexandria*, 2 (2), 07-32.

Campos, C. R. (2007). *A Educação Estatística*: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação. Tesis (Doctorado). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

Campos, C. R. *Towards critical statistics education*. Saarbrücken/Deutschland: Lambert Academic Publishing, 2016

Cobb, G. W.; Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104, 801-823.

Creswell, J. W.; Creswell, J. D. (2021) *Projeto de pesquisa - Métodos qualitativo, quantitativo e misto*. 5ª. ed. Porto Alegre: Penso Editora.

Evangelista, D. H. R. (2015). *Educação Estatística Crítica na formação do Engenheiro Ambiental*. Tesis (Doctorado). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

Fernandes, R. J. G. (2020). *Articulação entre o letramento estatístico de Gal e a compreensão gráfica de Curcio para a formação de professores no âmbito da educação estatística*. Tesis (Doctorado). Ponta Grossa: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gal, I. (2021). Promoting statistical literacy: Challenges and reflections with a Brazilian perspective. In Monteiro, C. E. F.; Carvalho, L. M. T. L. *Temas Emergentes em Letramento Estatístico*. Recife: Editora: UFPE, 37-59.

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3), 1-13.

Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 22-25.

Mendonça, L. O. (2008). *A educação estatística em um ambiente de Modelagem Matemática no Ensino Médio*. Dissertación (Maestria). São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul.

Perin, A. P. (2019). *Educação Estatística Crítica*: um estudo das práticas discentes em um curso de tecnologia. Tesis de Doctorado. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

Porciúncula, M. (2022). *Letramento Multimídia Estatístico - LeME*: Projetos de Aprendizagem Estatísticos na Educação Básica e Superior. Curitiba: Ed. Appris.

Silva, C. B. (2007). *Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação*: um estudo com professores de Matemática. Tesis (Doctorado). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contribution to total quality. *The American Statistician*, 44(2), 116-121.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading MA: Addison-Wesley Publishing.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.

Yin, R. K. (2015). *Estudo de Caso*: planejamento e métodos. Porto Alegre: Bookman.

BÚSQUEDA CIENTÍFICA DEL CONOCIMIENTO Y PENSAMIENTO ESTADÍSTICO EN LA TOMA DE DECISIONES

Olga Susana FILIPPINI
Departamento Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Luján, Argentina
sfilippini@unlu.edu.ar

Resumen

Las instituciones universitarias tienen como propósitos esenciales la creación y difusión del conocimiento científico y su contribución al desarrollo tecnológico, el crecimiento económico sostenible, la extensión cultural y el progreso social. Consideremos a la "ciencia" como: "*todo tipo de conocimiento sistemático y articulado que aspira a formular, mediante lenguajes apropiados y rigurosos, las leyes que rigen los fenómenos relativos a un determinado sector de la realidad*". Así, en la búsqueda del conocimiento, la ciencia avanza según los pasos del método científico, dónde la Estadística, cumple un rol fundamental, sirve para conducir la investigación, hace posible ensayar varios factores simultáneamente, proporcionando una clara imagen de cómo influyen sobre la respuesta cada uno de ellos, y conjuntamente.". En este contexto se hace referencia al "Pensamiento Estadístico" y sus principios. Estadística presenta grandes posibilidades **teóricas**, , ligada a los conocimientos matemáticos y probabilísticos.. Tal como sucede con la Informática o con cualquier otra disciplina "**transversal**" aunque puede tener desarrollo propio, toma "vida" cuando se vincula con alguna otra que le brinda las posibilidades de aplicar sus servicios, técnicas y métodos. Se relaciona interdisciplinarmente al aplicarla en una situación problemática. Funcionan a su vez como un sistema de ideas o principios que se ponen en relación para interpretar y actuar en ese contexto. Comprenden también el conjunto de destrezas y habilidades que es necesario desplegar en un momento o transferir a otros contextos y situaciones e incluye actitudes, valores, atributos personales y disposiciones que median los conocimientos y destrezas.

Palabras clave: Conocimiento Científico - Pensamiento Estadístico – Interdisciplina – Transversalidad - Inferencia Estadística.

Comenzaremos esta presentación destacando el roll de la Universidad en la sociedad actual. Esta constituye una institución de formación superior que tiene entre sus fines principales la preparación de profesionales altamente cualificados que van a desempeñar múltiples puestos de responsabilidad en distintos campos laborales. Junto a esta elevada capacitación de los egresados, las instituciones universitarias tienen como propósitos esenciales la creación y difusión del conocimiento científico y su contribución al desarrollo tecnológico, el crecimiento económico sostenible, la extensión cultural y el progreso social. En realidad, en uno u otro sentido, las universidades se han convertido en una de las instancias clave de las sociedades desarrolladas que se han situado generalmente, al menos en lo referente a investigación científica y tecnológica, en una posición avanzada. Por ello, pretendemos en esta participación considerar a la Estadística, cómo un pequeño aporte a la enseñanza en virtualidad en disciplinas transversales a otras disciplinas y en la búsqueda del conocimiento. . Son múltiples los cambios que ha experimentado nuestro entorno en las últimas décadas, hasta el punto de que se ha evolucionado desde la era industrial a la sociedad de la información. Nuestro contexto social se ha transformado en todas sus esferas constitutivas y esto plantea nuevas demandas y desafíos a los sistemas de Educación Superior.Comenzaremos, por tanto, con la definición acerca de que es la "ciencia" que es: "*todo tipo de conocimiento sistemático y articulado que aspira a formular, mediante lenguajes apropiados y rigurosos, las leyes que rigen los fenómenos relativos a un determinado sector de la realidad*". En la búsqueda del conocimiento, la ciencia avanza según los pasos del método científico a saber:

-Planteamiento del problema: Lo primero que se debe hacer es plantear el problema que se quiere resolver.

-Observación: Se debe observar de forma sistemática el fenómeno o comportamiento que se quiere comprobar. Un aspecto importante de la observación científica es la tendencia a ser cuantitativa, usándose números como parte de la descripción, siempre que sea posible. El uso de medidas numéricas permite una descripción más precisa y hace factible la aplicación de las matemáticas.

-Formulación de la hipótesis: La hipótesis consiste en la traducción de las ideas del científico sobre la naturaleza y la relación de las observaciones. Es la explicación propuesta ante el hecho observado, su utilidad consiste en que proporciona una interpretación de los hechos que se disponen, interpretación que debe ser puesta a prueba por observaciones y experimentos posteriores.

-Experimentación: Se reúnen todos los datos posibles que incidan en el problema. Se repite el experimento bajo distintas circunstancias, si los resultados se modifican, la circunstancia que se ha cambiado o añadido influye en el problema y será importante para su análisis. Además, en esta etapa, se controlan las variables que intervienen, tratando de averiguar su influencia. Los resultados obtenidos tienen por objetivo contrastar la hipótesis previamente formulada y finalmente poder corroborarla o refutarla.

-Establecimiento de una ley: La ley surge luego de que una hipótesis ha sido demostrada mediante el experimento. La misma debe estar expresada en lenguaje matemático y nos permite predecir el desarrollo y evolución de cualquier fenómeno natural.

En este proceso, la estadística, cumple un rol fundamental, no solo porque provee las guías para planear, diseñar y conducir la investigación, sino también porque hace posible ensayar varios factores simultáneamente, proporcionando una clara imagen de cómo influyen sobre la respuesta cada uno de ellos, de manera aislada como así también conjuntamente. En todo diseño de experimento se encuentra presente el error experimental que es la variabilidad de una respuesta no atribuible a influencias conocidas. El uso adecuado del análisis estadístico permite reducir su confusa influencia. Además, el empleo de la estadística en el método científico proporciona medidas de precisión de las cantidades estimadas objeto de nuestro estudio. Esto hace posible juzgar si existe evidencia sólida de efectos reales y, de esta forma, incrementar la probabilidad de que el investigador siga un camino correcto y no uno falso. En resumen, la estadística en conjunto con el método científico nos proporciona un procedimiento analítico para tomar decisiones. Permítanme entonces mencionar algunas definiciones de esta disciplina de quienes consideran a la Estadística como una Ciencia:

"Disciplina que investiga la posibilidad de extraer de los datos inferencias válidas, elaborando los métodos mediante los cuales puede obtener dichas inferencias"- H Cramer-

"Disciplina que trata los problemas relativos a las características operatorias de las reglas de comportamiento inductivo, basadas en experimentos aleatorios." Neyman. J.

Analizando estas definiciones podemos pensar en que la Estadística

Asimismo, cuando nos referimos a la búsqueda científica del conocimiento, no estamos pensando solamente en grandes investigaciones científicas con impactos muy grandes para la humanidad o para una comunidad específica, sino que también enmarcamos como búsqueda científica aquella que debemos hacer para resolver un problema concreto en un ámbito empresarial o de un entorno social particular o inclusive familiar. Podríamos en principio definir “problema” como la ausencia de conocimiento que nos impide, por ejemplo, tomar decisiones con racionalidad. Esa falta de conocimiento puede ser de muy variadas clases; puede tratarse de buscar explicación para cierto comportamiento de la naturaleza, buscamos “causas”, buscamos relaciones que pueden existir entre características de un fenómeno, buscamos conocer una cierta cantidad o cuantificar la magnitud de un parámetro. En el intento por llenar un vacío de conocimiento, personas diferentes podrían tener propuestas distintas sobre estrategias para llenar el mencionado vacío, es decir, maneras variadas de ir a la búsqueda del conocimiento, distintas opciones de investigar el mismo problema. Por esta razón, entre muchas otras, no hay que confundirse cuando se habla de “El Método Científico”, pues pareciera que para cada problema de investigación existiera una única manera (método) de aproximarse a “la verdad”. Por ejemplo, cada vez son más recurrentes las aplicaciones de métodos estadísticos en la gestión de proyectos y presupuestos de todo tipo y dimensión. La gestión de los sistemas de sanidad y seguridad social son hoy inconcebibles sin el empleo de metodologías estadísticas, capaces de recopilar una inmensa cantidad de datos de forma continua para su posterior tratamiento a través de potentes paquetes estadísticos informáticos. En la actualidad, el análisis estadístico se utiliza para hacer "radiografías" de la situación demográfica y social de un país, así como predicciones de cómo evolucionará su población en los próximos 50 o 100 años. En la investigación social tradicionalmente han existido dos vertientes metodológicas: la cualitativa, que privilegia la recopilación de información sobre valores objetivos medibles a través de técnicas cualitativas como la observación, la entrevista, la participación grupal, los grupos de enfoque, entre otros métodos, y la cuantitativa, que se auxilia de la recopilación y análisis de datos. Actualmente se combinan ambas metodologías, aplicando preceptos estadísticos a las técnicas tradicionales de investigación cualitativa. Precisamente uno de los atractivos de la Estadística consiste en eso, en su versatilidad de aplicación. Así, los procesos de investigación se han fortalecido y consolidado a lo largo de las últimas décadas gracias, en parte, a los avances tecnológicos que han dotado de potencia el tratamiento informático de los datos, ya sean cualitativos o cuantitativos. Pero aun la información oportuna, pertinente y de buena calidad; no ayudará a las políticas y a los encargados de tomar las decisiones si no pueden comprenderla y usarla. La forma en que se presenta la información, y qué historia ayuda a contar, pueden afectar las decisiones basadas en esa información. Debido a ello, en el siglo XX, se comenzó a hacer hincapié en lo que dio por llamarse “***El pensamiento estadístico***”. En los últimos tiempos en la literatura estadística se hace referencia a “pensamiento estadístico”. Así por ejemplo en la International Statistical Review de la ISI, en su número de agosto de 1999, aparece un artículo de Dransfield S.B., Fisher N.I. and Vogel N.J., titulado “Using Statistics and Statistical thinking to improve Organizational Performance”. En éste, se cita a Mallows (1998), quien revisó un número de definiciones sobre pensamiento estadístico. *Es* obvio que no se refiere a nuevas metodologías sino a cómo fue definido por la American Society for Quality (ASQ) en 1996. De acuerdo con esta Sociedad, “*el pensamiento estadístico es una filosofía de aprendizaje y acción basada en varios principios fundamentales que tiene como finalidad el logro del mejoramiento del desempeño institucional*”. El pensamiento estadístico tiene como base cuatro premisas fundamentales:

- ***“La información es poder”*** Que fue expresado hace varios siglos por el filósofo, Sir Francis Bacon (1561-1626).
- ***“El buen manejo de la información genera valor”.***
- ***“Los trabajos constituyen una serie de procesos interconectados”***.
- ***“La variabilidad existe en todos los procesos”***.

A su vez las cuatro premisas anteriores constituyen la base de los siguientes **seis principios** operativos del pensamiento estadístico en relación a la recopilación y tratamiento de información para la toma de decisiones.

Principio 1

Reconocimiento de la necesidad de disponer de datos, necesarios, suficientes y confiables: todo investigador u organismo, debe tomar sus decisiones sobre la base de información, pero poseer excesiva información si no es confiable, es tan dañino como carecer de la misma.

Principio 2

Implementar los operativos de recolección de información de manera que se logre la comparabilidad: se destaca que salvo excepciones un dato aislado no dice mucho, luego es de fundamental importancia que las series, investigaciones y operativos se planifiquen pensando en su repetibilidad en el tiempo, en el espacio o en ambos a fin de posibilitar la comparación.

Principio 3

Disponer de la capacidad para transformar la información básica: por lo común los datos disponibles poseen información oculta y a partir de determinadas y variadas modificaciones se mejora su comprensión y se extrae información adicional no visible, por ejemplo, el solo hecho de clasificar datos de una variable originada de mediciones de rendimiento de un cultivo de acuerdo a características diferenciales del suelo hace surgir nuevos y más valiosos indicadores.

Principio 4

Reconocimiento de la variabilidad de los datos: La American Society for Quality (ASQ) en 1996 afirmaba que "***entender y reducir la variación constituye la clave del éxito***". Es un hecho la existencia de variabilidad en los datos, que frecuentemente son de tipo aleatorio, y a través de adecuados controles se la puede llegar a reducir, pero difícilmente eliminar. En general el desarrollo de los métodos estadísticos estuvo y está ligado con el progresivo desarrollo de las facilidades de medición de la variabilidad.

Principio 5

Asimilación a modelos de comportamiento: como consecuencia de las formas de encarar el manejo estadístico de la información es posible asimilar a estos procesos, modelos de tipo matemáticos, factibles de que se repitan en circunstancia similares.

Aunque originalmente no formaba parte del pensamiento estadístico, es conveniente agregar el siguiente principio:

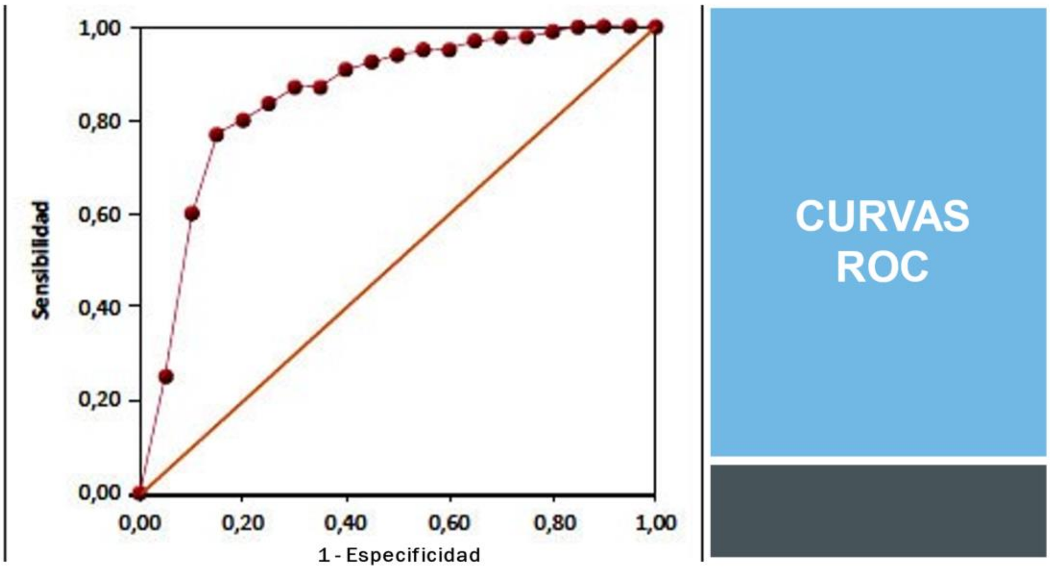
Principio 6

Cumplir con los principios éticos: un mal uso de la estadística, como: ocultar información, alterar presentaciones gráficas, delatar datos confidenciales, etc., si se hace a propósito es una falta a la ética; no obstante, es frecuente que respondan a errores involuntarios, y es en estos casos en los que la ética indica que si se detectan deben ser reconocidos y señalados.

En la actualidad todos los campos de actividad están ligados en forma directa o indirecta a la Estadística. Si bien la Estadística es una disciplina de grandes posibilidades **teóricas**, esta faceta se encuentra muy ligada a los conocimientos matemáticos y probabilísticos. El campo más amplio de la Estadística se encuentra en las **aplicaciones** en cualquier área de actividad. Es que la Estadística, como sucede con la Informática o con cualquier otra disciplina "**transversal**" (es decir que se cruza con cualquiera de las restantes), aunque puede tener desarrollo propio, toma "vida" cuando se vincula con alguna otra que le brinda las posibilidades de aplicar sus servicios, técnicas y métodos. A modo de ejemplo veamos cómo se toman decisiones en el área de salud a partir de distintas pruebas diagnósticas. La toma de decisiones clínicas es un proceso extremadamente complejo en el que deberá finalmente ser valorada la utilidad para el manejo del paciente, de cualquier prueba diagnóstica. En este contexto, es imprescindible conocer detalladamente la exactitud de las distintas pruebas diagnósticas, es decir, su capacidad para clasificar correctamente a los pacientes en categorías o estados en relación con la enfermedad (típicamente dos: estar o no estar enfermo, respuesta positiva o negativa a la terapia...). La limitación principal del enfoque hasta ahora expuesto estribaría en nuestra exigencia de que la respuesta proporcionada por la prueba diagnóstica sea de tipo dicotómico, por lo que en principio quedaría excluida la amplia gama de pruebas diagnósticas cuyos resultados se miden en una escala (nominalmente) continua o, al menos, discreta ordinal. Para este tipo de problemas son muy utilizadas las Curvas Roc. En medicina el análisis ROC se ha utilizado de forma muy extensa en epidemiología e investigación médica, de tal modo **que se encuentra muy relacionado con la Medicina Basada en la Evidencia. Es la técnica de preferencia para evaluar nuevas técnicas de diagnóstico por imágenes.** Cuando las pruebas diagnósticas son cuantitativas, es necesario determinar el punto de corte que establezca si se posee una condición o no. Las curvas ROC (Receiver Operating Characteristic o Característica Operativa del Receptor) proporcionan un buen índice de discriminación de la prueba diagnóstica entre los estados alternativos de salud siempre que los resultados estén medidos en escala continua, ordinal o por intervalo, este tipo de análisis estadístico nos permite evaluar la capacidad de discriminación de una prueba diagnóstica entre estados alternativos de salud mutuamente excluyentes (sano/enfermo, positivo/negativo, etc.).

- Gráfico de curva ROC de un test diagnóstico hipotético.

  La curva ROC se construye en base a la unión de distintos puntos de corte, se va generando una curva escalonada, de modo que cuando se obtiene un verdadero positivo la curva se desplazará verticalmente y en caso de que se obtengan falsos positivos la curva se desplazará horizontalmente.



Algunos de los conceptos básicos de la Estadística que se podrían destacar y enseñar desde otra disciplina cómo la Epidemiología, serian: Recodificación de variables. Probabilidades condicionales, calculando Sensibilidad y Especificidad de una prueba diagnóstica. Concepto de Tabla de contingencia. Exploración de una una variable continua. Histograma de una muestra de una variable continua. Estimación de parámetros en la distribución Normal. Prueba de hipótesis.
La estadística ayuda a corroborar hipótesis proporcionando un soporte matemático a las observaciones realizadas. Es una ciencia probabilística, por lo que no hay lugar para las afirmaciones categóricas o negaciones rotundas, que siempre deben estar enmarcadas en un nivel de significación o dentro de un margen de error. Por todas estas características, esta disciplina permitiría seleccionar y organizar los contenidos académicos tomando como base módulos disciplinares o, mejor aún interdisciplinares, estructurados en núcleos problemáticos y redes de problemas, lo que facilitaría su conocimiento y aplicación en un espacio de virtualidad de la enseñanza. Evidentemente, no es lo mismo preparar a los estudiantes para que consigan una formación especializada y única que los capacite para desarrollar un puesto específico de trabajo inmutable, que formar a los egresados de manera técnica y polivalente para dotarles de las competencias necesarias que les van a permitir un desempeño eficaz en distintas ocupaciones a lo largo de su carrera profesional. Esto implicaría abrir una puerta a la interdisciplinariedad. Adquirir una competencia determinada a partir de una única materia es casi imposible, por lo que el enfoque ideal para lograr su pleno desarrollo es el inter o transdisciplinar. Por ello, también la evaluación del aprendizaje debería cambiar. En este contexto, los saberes adquiridos de manera interdisciplinar entre las demás ciencias utilizando en forma transversal a la Estadística, son los conocimientos que se precisan activar y aplicar en la situación problemática. Funcionan a su vez como un sistema de ideas o principios que se ponen en relación para interpretar y actuar en ese contexto. Comprenden también el saber hacer, que son el conjunto de destrezas y habilidades que es necesario desplegar en un momento o transferir a otros contextos y situaciones. Finalmente incluye el saber ser, que se refieren al elenco de actitudes, valores, atributos personales y disposiciones que median la puesta en juego de los conocimientos y destrezas.

Referencias Bibliográficas

Batanero, Carmen, (2001), Didáctica de la Estadística, Grupo de Educación Estadística Universitaria de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.

Bermúdez, M.P. & Guilén, A. (2011). VIII Foro sobre Evaluación de la Calidad de la Investigación y de la Educación Superior. Granada: AEPC.

Biggs, J.B. (2005). Calidad del aprendizaje universitario. Madrid. Nancea.

Maffesoli, Michel. 1999. El Nomadismo fundador. En: Revista Nómadas. No 10. Santafé de Bogotá. Departamento de Investigaciones Universidad Central. Abril. Pág. 126 -142.

Mallows C. (1998). "The Zeroth Problem". American Statistician 52, 1-9.

Monereo, C. (2006). Ser estratégico y autónomo aprendiendo. Unidades didácticas de enseñanza estratégica. Barcelona: Graó.

Popper, K. (1962). La lógica de la investigación científica. Madrid: Tecnos.

Rodriguez, M. (2009). Competencias docentes y calidad de la educación superior en ambientes virtuales. Revista Iberoamericana de Investigación en Educación Superior. Vol. I nº 1, 40 -44.

Tobón, S. (2006). Las competencias en la educación superior. Madrid: Universidad Complutense.

Trochim William (2002). "Research Methods Knowlodge Base". Atomic Dog Publishing. Cornell.USA.

Wild C.J. and M. Pfannkuch. (1999). "Statistical Thinking in Empirical Enquiry". International Statistical Review, 67, 3, 223-265. ISI.

ISBN 978-987-3941-86-3